全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

王莲芬
蔡海鸥 编著
孙宏才

投资决策量化方法

在市场经济下，投资已经成为一种日常的经济行为，这就需要人们对投资的基本概念、原理和方法、投资的基本品种、投资的风险与收益有一个全面的了解。本书从教育角度出发，应用定量的以及定量与定性相结合的方法讨论投资决策问题，使投资行为站在坚实而严密的数学理论基础上，从而使人们投资行为更理性化，投资的结果有更高的效率。



海洋出版社

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

投资决策量化方法

王莲芬　蔡海鸥　孙宏才　编著

海洋出版社

2006年·北京

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

图书在版编目(CIP)数据

投资决策量化方法/王莲芬,蔡海鸥,孙宏才编著.
北京:海洋出版社,2006.3
ISBN 7-5027-6557-3

Ⅰ.投… Ⅱ.①王... ②蔡... ③孙... Ⅲ.投资—经济决策 Ⅳ.F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 020677 号

责任编辑:白 燕
责任印制:严国晋

海洋出版社 出版发行
http://www.oceanpress.com.cn
(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)
北京海洋印刷厂印刷 新华书店北京发行所经销
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷
开本:850mm×1168mm 1/32 印张:10.375
字数:257 千字 印数:1~2500 册
定价:28.00 元
海洋版图书印、装错误可随时退换

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

前　言

在市场经济下，投资已经成为人们一种日常的经济行为。这就需要人们对投资的基本概念、原理和方法、投资的基本品种、投资的风险与收益有一个全面的了解。本书从教育角度出发，应用定量的以及定量与定性相结合的方法讨论投资决策问题，使投资行为建立在坚实而严密的数学理论基础上，从而使人们投资行为更理性化，投资的结果有更高的效率。

本书共分 8 章，着重阐述投资决策的数学原理和各种定量与定性相结合的实用决策方法。第 1 章介绍投资分析的基本概念，以金融性投资为主，介绍货币的有效运营和使用价值。第 2 章介绍数学规划以及在投资决策中的应用，主要以资金预算为研究对象，提供可以量化投资效果的线性规划方法。第 3 章、第 4 章和第 5 章介绍风险决策原理和常见的决策方法，如决策中的博弈原理和股票投资。第 6 章，介绍一个非常实用的投资决策——项目评估直接法。第 7 章，介绍一种定量与定性相结合很有效的决策方法，非常适合宏观决策和领导决策。第 8 章介绍最优化中常见的决策方法——多目标决策。

本书既有完整的数学理论基础，同时又尽量用简明易懂的语言，深入浅出地进行论述,并有较多的应用实例。它既可作为大学数学专业、金融专业和经济专业的本科生及研究生的一本跨学科的教材，也可以作为金融机构和经济研究部门工作人员以及对投资原理感兴趣的读者的参考书。

作　者

2005 年 10 月

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

目　次

第 1 章　投资分析基础……………………………………………1
1.1　投资的意义………………………………………………1
1.2　货币的时间价值…………………………………………2
1.3　不同支付形式的现值计算………………………………8
1.4　现值计算应用实例——收入流现值计算、奖券、债券、分期付款……………………………………………21
1.5　投资的收益率与益本比…………………………………24
1.6　投资决策准则及评估实例………………………………27
1.7　消费偏好、无差异曲线与效用函数……………………35
1.8　投资和融资决策分离理论………………………………40
第 2 章　确定资本预算的数学规划方法……………………44
2.1　线性规划的数学模型……………………………………45
2.2　资本预算的线性规划模型………………………………50
2.3　对偶线性规划与资本预算………………………………54
2.4　投资预算的整数规划 IP 模型…………………………64
2.5　参数规划，随机规划……………………………………67
第 3 章　不确定型投资决策方法……………………………84
3.1　概述………………………………………………………84
3.2　自然状态概率的确定方法………………………………86

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

3.3　效用函数与风险价格……89
3.4　风险型决策准则……96
3.5　决策树……99
3.6　避免和分散风险案例分析……103
3.7　信息的价值……107
3.8　完全不确定型决策方法……112
第 4 章　证券投资概论……117
4.1　股票投资要素……117
4.2　报酬与风险量化方法……119
4.3　投资组合与效率前缘……125
4.4　资本资产定价模式……135
第 5 章　存在竞争对手的决策方法……143
5.1　概述……143
5.2　两人零和对策……144
5.3　两人非零和对策及 n 人对策……155
5.4　承包工程的投标报价策略……163
第 6 章　项目评估直接法……173
6.1　概述……173
6.2　专家评价法……174
6.3　特尔斐(Delphi)方法……182
6.4　穆迪顺序图……186
第 7 章　层次分析法(AHP)……192

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.1 概述……192
7.2 层次分析法的基本方法与步骤……193
7.3 有向图及可达性……208
7.4 递阶层次结构的建立……215
7.5 单准则下特征根方法及一致性检验……222
7.6 准则型与分配型 AHP……236
7.7 不完全信息下的排序……240
7.8 专家咨询与群组排序……251
7.9 内部依存的递阶层次结构的排序……257
第 8 章 多目标决策……260
8.1 基本概念……260
8.2 多目标问题的解集……262
8.3 像集……267
8.4 多目标规划的约束法……270
8.5 评价函数法……273
8.6 权系数的确定方法……281
8.7 目标规划方法……286
8.8 DEA(数据包络分析)方法介绍……296
8.9 模糊决策方法介绍……310
参考文献……320

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第1章　投资分析基础

1.1　投资的意义

随着我国市场经济的发展与完善，各种投资工具纷纷亮相，众多投资工具在当今社会中扮演了一个相当重要的角色，参与投资的单位与个人也越来越多。例如一家合资公司投资数亿元建造一个商场，希望从商场经营中获利。一个工薪族将部分收入储蓄在银行里，而银行又将存款贷给这家公司修建商场，于是这位工薪族就成为商场的间接投资者。一对年轻夫妇将大量物力财力花费在培养子女上，可以称为智力投资。由此可知，投资包含非常广泛的对象。

投资的最广泛定义是：牺牲目前的确定的事物或消费以换取未来不确定的事物或消费。从广义上看，储蓄、投资股票、购买彩票等都可看成投资，它们之间的区别在于风险大小。储蓄可以说是一种放弃消费的行为，一般而言比较消极，其未来报酬是确定的。投资者则是投入金钱以赚取金融收益，具有较积极的争取未来报酬的意向。一般，投资者能在理性地衡量风险与收益的关系后，牺牲目前的利益以期在将来获取更大的利益。投机者则试图利用暂不为人所知或别人不懂的信息，尤其是通过市场波动及买卖差价牟利。投机者承担的风险相对要大得多。投资与投机的区别有时十分微妙，其界限往往只是一线之隔。例如在股票市场飚涨时期，原先买入股票准备长期持有的投资人，可能因差价的诱惑而短期进出，变成了投机客。而在股票市场暴跌，进入空头时期，一些原本短线进出的投机人

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

会因为股票被套牢而不得不长期持有，反而变成投资了。对当前我国的股票持有者而言，往往是投资、投机两者兼而有之。至于购买彩票，则是对不确定的未来打赌，其所冒的风险远远超过其预期报酬所应承担的风险。本书所涉及的投资活动，无论是单位的或者个人的，均属于理性的投资活动。

投资又可区分为实质性投资与金融性投资，实质性投资包括购买房地产、共建商场、工厂等，金融性投资则包括购买股票、债券、期货选择权等，这两种投资是相辅相成互相促进的。例如工薪族为购买住房而存款或进行其他金融性投资，房地产公司则向银行贷款修建住房，它们的资金来源有可能就是尚未有能力购房的存款人，这样金融投资促进了实质性投资，而实质性投资的进行又可能增发新股，从而为金融性投资创造新的条件。

投资是一门科学，也是一门艺术。投资的收获从个人看是金钱和心理上的双重收获。虽然熟悉投资理论的人不一定能投资得好，但懂得一些投资知识，特别是一些量化方法就会减少盲目性，增加投资成功的可能性。

1.2 货币的时间价值

在确定投资决策时需要考虑众多因素，其中一个最重要因素就是经济效益。任何投资都需要有回报，而经济效益就是最重要的回报。

人们常说"时间就是金钱"，其实金钱本身的价值也与时间有密切关系。同样是 1 元，10 年前的 1 元和今天的 1 元，以及 10 年后的 1 元其价值是不同的，它们是不同的商品。如果按年利率 10%计算，20 年后的 1 元其价值只相当于今天的 0.15 元。由此可见，货币具有时间价值，不同时期的货币是不能直接相

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

加的，也不能直接用票面进行比较的。

投资是现在的或即将到来的收入与当前的支出的交换，这种交换是否有效益就必须考虑货币的时间效应，为此就需要考察项目的投资方式。所谓投资方式这里是指先期资金流量分布方式。举例来说，假设我们对某项目的投资有三种方式可供选择。该项目的使用寿命为 5 年，一次投资总费用均为 10 000 元，并且均可获得总毛利 20 000 元，但这 20 000 元在时间上有不同分布，如表 1.1 所示。那么哪一种方式最好呢？要回答这一问题就要了解影响货币时间价值的重要因素——利率。利率反映了不同时间的货币之间的兑换关系，从而也反映了货币的时间价值。

表 1.1　不同投资方案的毛利分布

年度	方案Ⅰ毛利	方案Ⅱ毛利	方案Ⅲ毛利
1	6 000	1 000	0
2	5 000	9 000	0
3	4 000	2 000	4 000
4	3 000	2 000	6 000
5	2 000	6 000	10 000
总毛利	20 000	20 000	20 000

1.2.1　利息与利率

我们已经知道，不同时间投入(或获得)等量货币，其实际价值是不同的，而利息和利率就是影响或表征货币的时间价值的重要因素。

利息可以从双重意义上理解。它既可以是使用资本的报酬，又可以是投资所得的利润。国家在实行拨改贷政策后，无论是国有的还是私人投资，在作经济评价时都得按借贷方进行研究，利息就起了更广泛的作用。

利息的计算标准是利率。利率的大小是由投资过程中货币数额的增长规律决定的。在实际生活中存在着各种名目的利率，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

诸如实际利率、名义利率、税前利率、税后利率、长短期利率等，要根据具体情形确定使用类别。

利率是单位货币的平均增长速度。下面分别考虑时间离散取值和连续取值两种情形进行计算。

(1) 时间离散取值

取 $t=0$，1，2，…(一般按年计)作为时间单位，t 时刻的投资货币额为 $P(t)$，经 j 时段投资其货币额成为 $P(t+j)$，那么 j 时段货币的平均增长速度为

$$v=\frac{P(t+j)-P(t)}{j}$$

平均利率 i 为

$$i=\frac{v}{P(t)}$$

在单位段时间内，若投资环境变化不大，i 可看做常数，那么

$$i=\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)} \tag{1.1}$$

得到

$$P(t+1)=P(t)(1+i) \tag{1.2}$$

即 1 元本金过一年后成为 $(1+i)$ 元。

(2) 时间连续取值

设 t 为连续变量，那么 t 时刻货币的增长速度为

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=P'(t)$$

于是

$$i=\frac{P'(t)}{P(t)}=\frac{\mathrm{d}\ln P(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.3}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

若在 t 到 $t+1$ 时间内仍把 i 看做常数，那么

即
$$P(t)=e^{it}\,e^{c} \tag{1.4}$$
$$P(t+1)=e^{i}\,P(t) \tag{1.5}$$

公式(1.2)和式(1.5)分别为离散时间与连续时间 $P(t)$到 $P(t+1)$的转换公式，当时间范围不长利率又不大时，两者计算结果相差不大，故如不特别规定，以下均按离散时间进行讨论。

不同的投资方式可以有不同的利率，向国家存款或贷款也有利率与利息，国家银行利率高低取决于国家投资的综合效果。此外，利率的大小还要受金融市场上资金供应状况的影响，当供大于求时，利率下降，反之利率上升。利率还与市场物价稳定与否、投资所承担的风险大小以及通货膨胀等各种社会因素有关。

当利率确定后，在一定时间(称为利期内)利息与利率的关系为

$$\text{利率}=(\text{所得利息额}/\text{贷出资金额})\times 100\%$$

1.2.2 单利与复利

在考虑多期存贷款时，计息方式分为单利与复利两种。计息期又分为按年、按季、按月计息各种方式。我国的个人储蓄以月利率计算。计息方式为单利。在项目投资中当还贷时间较长时多用复利计算。单利和复利计息方式有很大差别，例如 1 元本金，年利率为 8%，若按复利计息，30 年后可得本利和 10.06 元，而若按单利计息本利和仅为 3.4 元。

以下为叙述简明起见，用下面各个符号表示指定的含义：

i：每个计息周期的利率；

n：计息期内的计息周期数；

P：本金的现时金额或称现值；

F：从现在起经过 n 个计息周期后的本利和；

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

I：期末利息值。

(1) 单利

如果计息时只用本金计算利息，不计先期周期中累加的利息，每期结尾支付一次利息。这种计息方式称为单利。所以，单利计息时要付出的利息与借入本金的时间长度成正比，其计息和最终本利和公式为

$$I=P \times n \times i \tag{1.6}$$

$$F=P(1+n\times i)=P+I \tag{1.7}$$

例如，某人以单利方式借入资金 10 000 元，规定年利率为 8%，那么第一年末应归还的利息与本金和为

I=10 000×1×0.08=800 元；

F=10 000×(1+0.08×1)=10.800 元。

若上述问题中资金借期为 4 年，每年偿还利息，最后偿还利息和本金，则前 3 年末各偿还利息 800 元，第 4 年末偿还本利和 10 800 元。

(2) 复利

如果每期期末结束时并不支付利息，而是由本金再加上先期利期中累计利息总额之和进行下一期计息，亦即本期利息转为下期的本金。这种计息方式称为复利。复利计算公式为

$$\text{第}\,n\,\text{期末本利和}\ F_n = P(1+i)^n \tag{1.8}$$

$$n\,\text{期末总复利息}\ I_n = P[(1+i)^n-1] \tag{1.9}$$

$$\text{本金}\ P = F_n[\frac{1}{(1+i)^n}] \tag{1.10}$$

例如上例中若借期为 4 年，那么第 4 年末偿还的本利和为 $F_4=10\,000\times(1+0.08)^4=13\,604.89$ 元。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

1.2.3 名义利率与实际利率

前面给出的利息计算公式一直把计息期按一年来考虑。但实际上计息期可以规定为半年、3 个月或一个月等不同周期。在这种情形下，若我们说年利率为 6%，每半年计息一次，则 6%的年利率实际上是一种“名义利率”，真正有效的是：计息期为 6 个月，利率为 3%。在借贷款业务中常规定一年进行几次利息支付和结账，这些利息还可以再生息。在实际中为了便于计算比较，常需将不同计息期的各项资金，全部转化为相同计息期的实际利率。

假设一年的计息期数为 n，计息期的名义(年)利率为 i'，实际年利率为 i，那么由一年后本利和相同的原则，即

$$P(1+\frac{i'}{n})^n=P(1+i) \tag{1.11}$$

可以得到实际

$$i=[(1+\frac{i'}{n})^n-1]\times 100\% \tag{1.12}$$

例如，贷款 10 000 元年利率为 8%，那么按年计息得到的一年后的本利和为

$$F_1=10\,000(1+0.08)=10\,800\text{ 元}$$

若按月计息，实际年利率应为

$$i=[(i+\frac{0.08}{12})^{12}-1]\times 100\%=8.3\%$$

年末本利和为 10 000(1+0.083)=10 830 元。

由此可见当名义利率相同时，不同的计息期实际利率是不同的。由于每期利息还可存入生息，故计息期越短，实际年利率越大。

又例如，银行 3 年期(即计息周期为 3 年)的名义年利率若为 8%，那么实际年利率 i'为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$P(1+i')^3=P(1+3\times0.08)$$

得到 $i'=7.43\%$，计息期越长实际年利率越低。

1.2.4 现金流量图

在考察不同投资方案的经济效果时，需要对各种不同支付形式计算利息。为便于研究，通常用现金流量图表示各个方案的现金流出入情形。现金流量图是由一条标有时间尺度的横线和若干条表示现金流量的纵向线段组成。每期收入(现金增加)用画在该期末尾的向上线段表示，其箭头向上。每期支出(现金

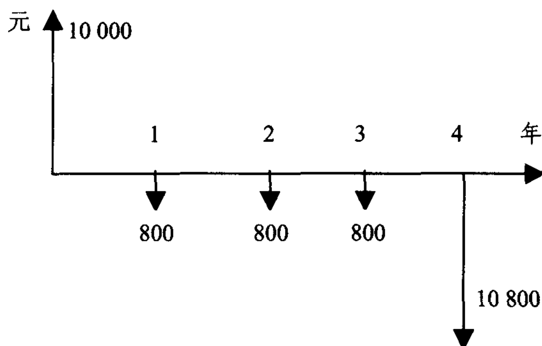


图 1.1　现金流量图

减少)则用带向下箭头的有向线段表示。有向线段长度与现金数量成正比。例如借款 10 000 元，借期 4 年，年利率为 8%，每年偿还利息，第 4 年末偿还本金和利息的现金流量图如图 1.1 所示。

1.3　不同支付形式的现值计算

不同时期的货币由于具有不同的价值，因而不能直接相加

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

或相减，要进行计算就要把不同时期的货币都换算成现在值，即现值。这里的现值是指做决策的时刻，通常是指投资开始的时刻。那么什么叫做现值呢？现值是指不同时期的货币的价值用现在的 1 元作单位来度量。现值也称净现值(NPV)。下一年 1 元的现值为 $\frac{1}{1+i}$ 元，上一年 1 元的现值为$(1+i)$元。下面对资金的不同支付方式，按复利来计算现值。

1.3.1 一次支付本利和系数与现值系数

设一次投资 P，年利率为 I，n 年后本利和为

$$F=P(1+i)^n \tag{1.13}$$

系数

$$\frac{F}{P}=(1+i)^n=(\frac{F}{P};\ i;\ n) \tag{1.14}$$

称为一次支付本利和系数(或复利系数)，见表 1.2。

若已知 n 年后资本的本利和为 F，则此本利和的现值为

$$P=F[\frac{1}{(1+i)^n}] \tag{1.15}$$

系数

$$\frac{P}{F}=\frac{1}{(1+i)^n}=(\frac{P}{F};\ i;\ n) \tag{1.16}$$

称为本利和的现值系数(见表 1.3，它是表 1.2 的倒数)。

例如，以年复利率 7%投资 10 000 元，到第 4 年末的本利和为 $F=10\,000(1+0.07)^4=13\,110$ 元，反之若要在四年后得到资金 13 110 元，当年复利率为 7%，现在必须投资 $P=\frac{13100}{(1+i)^4}$ $=10\,000$ 元。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 1.2 本利和系数 $F/P=(F/P;i;n)$(即 1 元本利和)(复利下)

利率 i / 周期 n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%	15%	16%
1	1.010	1.020	1.030	1.040	1.050	1.060	1.070	1.080	1.090	1.100	1.120	1.140	1.150	1.160
2	1.020	1.040	1.061	1.082	1.102	1.124	1.145	1.116	1.186	1.210	1.254	1.300	1.322	1.346
3	1.030	1.061	1.093	1.125	1.158	1.191	1.225	1.260	1.295	1.331	1.405	1.482	1.521	1.561
4	1.041	1.082	1.126	1.170	1.216	1.262	1.311	1.360	1.412	1.464	1.574	1.689	1.749	1.811
5	1.051	1.104	1.159	1.217	1.276	1.338	1.403	1.469	1.539	1.611	1.762	1.925	2.011	2.100
6	1.062	1.126	1.194	1.265	1.340	1.419	1.501	1.587	1.677	1.772	1.974	2.195	2.313	2.436
7	1.072	1.149	1.230	1.316	1.407	1.504	1.606	1.714	1.828	1.949	2.211	2.502	2.660	2.826
8	1.083	1.172	1.267	1.369	1.477	1.594	1.718	1.851	1.993	2.144	2.476	2.853	3.059	3.278
9	1.094	1.195	1.344	1.423	1.551	1.689	1.838	1.999	2.172	2.358	2.773	3.252	3.518	3.803
10	1.105	1.219	1.384	1.480	1.629	1.791	1.967	2.159	2.367	2.594	3.106	3.707	4.046	4.411
11	1.116	1.243	1.326	1.539	1.710	1.898	2.105	2.332	2.580	2.853	3.479	4.226	4.652	5.117
12	1.127	1.268	1.426	1.601	1.796	2.012	2.252	2.518	2.813	3.138	3.896	4.818	5.350	5.926
13	1.138	1.294	1.469	1.665	1.886	2.133	2.410	2.720	3.066	3.452	4.363	5.492	6.153	6.886
14	1.149	1.319	1.513	1.732	1.980	2.261	2.579	2.937	3.342	3.797	4.887	6.261	7.076	7.988
15	1.161	1.346	1.558	1.801	2.079	2.397	2.759	3.172	3.642	4.177	5.474	7.138	8.137	9.266
16	1.173	1.373	1.605	1.873	2.183	2.540	2.952	3.426	3.970	4.595	6.130	8.137	9.358	10.748
17	1.184	1.400	1.653	1.948	2.292	2.693	3.159	3.700	4.328	5.054	6.866	9.276	10.761	12.468
18	1.196	1.428	1.702	2.026	2.407	2.854	3.380	3.996	4.717	5.560	7.690	10.576	12.375	14.463
19	1.208	1.457	1.754	2.107	2.527	3.026	3.617	4.316	5.142	6.116	8.613	12.056	14.232	16.777
20	1.220	1.486	1.906	2.191	2.653	3.207	3.870	4.661	5.604	6.728	9.646	13.743	16.367	19.461
25	1.282	1.641	2.094	2.666	3.386	4.292	5.247	6.848	8.623	10.835	17.000	26.462	32.919	40.874
30	1.348	1.811	2.427	3.243	4.322	5.743	7.612	10.063	13.268	17.449	29.960	50.950	66.212	85.850

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 1.3 本利和现值系数 $P/F=(P/F;i;n)$(复利下)

利率 i / 周期 n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%	15%	16%	18%	20%	24%	28%	32%	36%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
1	.990	.980	.971	.962	.952	.943	.935	.926	.917	.909	.893	.877	.870	.862	.847	.833	.806	.781	.758	.735	.714	.667	.625	.588	.556	.526
2	.980	.961	.943	.925	.907	.890	.873	.857	.842	.826	.797	.769	.756	.743	.718	.694	.650	.610	.574	.541	.510	.444	.391	.346	.309	.277
3	.971	.942	.915	.889	.864	.840	.816	.794	.772	.751	.712	.675	.658	.641	.609	.579	.524	.477	.435	.398	.364	.296	.244	.204	.171	.146
4	.961	.924	.889	.855	.823	.792	.763	.735	.708	.683	.636	.592	.572	.552	.516	.482	.423	.373	.329	.292	.260	.198	.153	.120	.095	.077
5	.951	.906	.863	.822	.784	.747	.713	.681	.650	.621	.567	.519	.497	.476	.437	.402	.341	.291	.250	.215	.186	.132	.095	.070	.053	.040
6	.942	.888	.838	.790	.746	.705	.666	.630	.596	.564	.507	.456	.432	.410	.370	.335	.275	.227	.189	.158	.133	.088	.060	.041	.029	.021
7	.933	.871	.813	.760	.711	.665	.623	.583	.547	.513	.452	.400	.376	.354	.314	.279	.222	.178	.173	.116	.095	.059	.037	.024	.016	.011
8	.923	.853	.789	.731	.677	.627	.582	.540	.502	.467	.404	.351	.327	.305	.266	.233	.179	.139	.108	.085	.068	.039	.023	.014	.009	.006
9	.914	.837	.766	.703	.645	.592	.544	.500	.460	.424	.361	.308	.284	.263	.226	.194	.144	.108	.082	.063	.048	.026	.015	.008	.005	.003
10	.905	.820	.744	.676	.614	.558	.508	.463	.422	.386	.322	.270	.247	.227	.191	.162	.116	.085	.062	.046	.035	.017	.009	.005	.003	.002
11	.896	.800	.722	.650	.585	.527	.475	.429	.388	.350	.287	.237	.215	.195	.162	.135	.094	.066	.047	.034	.025	.012	.006	.003	.002	.001
12	.887	.788	.701	.625	.557	.497	.444	.397	.356	.319	.257	.208	.187	.168	.137	.112	.076	.052	.036	.025	.018	.008	.004	.002	.001	.001
13	.978	.773	.681	.601	.530	.469	.415	.368	.326	.290	.229	.182	.163	.145	.116	.093	.061	.040	.027	.018	.013	.005	.002	.001	.001	.000
14	.870	.758	.661	.577	.505	.442	.388	340	.299	.263	.205	.160	.141	.125	.099	.078	.049	.032	.021	.014	.009	.003	.001	.001	.000	.000
15	.861	.743	.642	.555	.481	.417	.362	.315	.275	.239	.183	.140	.123	.108	.084	.065	.040	.025	.016	.010	.006	.002	.001	.000	.000	.000
16	.853	.728	.623	.534	.458	.394	.339	.292	.252	.218	.163	.123	.107	.093	.071	.054	.032	.019	.012	.007	.005	.002	.001	.000	.000	
17	.844	.714	.605	.513	.436	.371	.317	.270	.231	.198	.146	.108	.093	.080	.060	.045	.026	.015	.009	.005	.003	.001	.000	.000		
18	.836	.700	.587	.494	.416	.350	.296	.250	.212	.180	.130	.095	.081	.089	.051	.038	.021	.012	.007	.004	.002	.001	.000	.000		
19	.828	.686	.570	.475	.396	.331	.276	.232	.194	.164	.116	.083	.070	.060	.043	.031	.017	.009	.005	.003	.002	.000	.000			
20	.820	.673	.554	.456	.377	.312	.258	.215	.178	.149	.104	.073	.061	.051	.037	.026	.014	.007	.004	.002	.001	.000	.000			
25	.780	.610	.478	.375	.295	.233	.184	.146	.116	.092	.059	.038	.030	.024	.016	.010	.005	.002	.001	.000	.000					
30	.742	.552	.412	.308	.231	.174	.131	.099	.075	.057	.033	.020	.015	.012	.007	.004	.002	.001	.000	.000						

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

1.3.2 等额多次支付本利和系数与现值系数

在投资分析中往往需要计算在连续地若干期的期末支付等额资金 A 下最后积累得到的本利和 F，其现金流量图如图 1.2

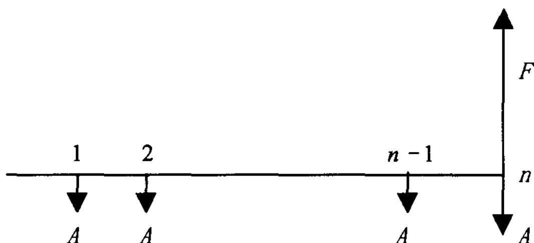


图 1.2 等额多次支付现金流量

所示，由此得到 n 期末本利和为

$$F=A(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+\cdots+A(1+i)+A$$

$$=A\frac{(1+i)^n-1}{i} \tag{1.17}$$

系数

$$\frac{F}{A}=\frac{(1+i)^n-1}{i}=(\frac{F}{A};\ i;\ n) \tag{1.18}$$

称为等额多次支付本利和系数(表 1.4)。例如，连续五年年末存款 10 000 元，按年利率 $i=10\%$计算，第五年末可得本利和

$$F=10\,000\frac{(1+0.1)^5-1}{0.1}=61\,050\text{ 元。}$$

假设我们要在若干(n)年后得到一项资金 F，那么从现在起每年年末应存入的资金为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n} - 1\right] \tag{1.19}$$

系数

$$\frac{A}{F} = \frac{i}{(1+i)^n} - 1 = \left(\frac{A}{F};\ i;\ n\right) \tag{1.20}$$

标为等额多次支付存储基金系数(它是表 1.4 上$\frac{F}{A}$的倒数)。该项资金的现值为

$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \tag{1.21}$$

系数

$$\frac{P}{A} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \tag{1.22}$$

标为等额多次支付的现值系数，见表 1.5。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 1.4 等额多次支付(A)的本利和系数 $F/A=(F/A;\ i;\ n)$(复利下)

利率 i / 周期 n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060	2.070	2.080	2.009	2.100	2.120	2.140
3	3.030	3.060	3.091	3.122	3.152	3.184	3.215	3.246	3.278	3.310	3.374	3.440
4	4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375	4.440	4.506	4.573	4.641	4.770	4.921
5	5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637	5.751	5.867	5.985	6.105	6.353	6.610
6	6.152	6.308	6.468	6.633	6.802	6.975	7.153	7.336	7.523	7.716	8.115	8.536
7	7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394	8.654	8.923	9.200	9.487	10.089	10.730
8	8.286	8.583	8.892	9.214	9.549	9.897	10.260	10.637	11.028	11.436	12.300	13.233
9	9.369	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491	11.978	12.488	13.021	13.579	14.776	16.085
10	10.462	10.950	11.464	12.006	12.578	13.181	13.816	14.487	15.193	15.937	17.549	19.337
11	11.567	12.169	12.808	13.486	14.207	14.972	15.784	16.645	17.560	18.531	20.655	23.044
12	12.683	13.412	14.192	15.026	15.917	16.870	17.883	18.977	20.141	21.384	24.133	27.271
13	13.809	14.680	15.618	16.627	17.713	18.882	20.141	21.495	22.953	24.523	28.029	32.089
14	14.947	15.974	17.086	18.292	19.599	21.051	22.550	24.215	26.019	27.975	32.393	37.581
15	16.097	17.293	18.599	20.024	21.579	23.276	25.129	27.152	29.361	31.772	37.280	43.842
16	17.258	18.639	20.157	21.825	23.657	25.673	27.888	30.324	33.003	35.950	42.753	50.980
17	18.430	20.012	21.762	23.698	25.840	28.213	30.840	33.750	36.974	40.545	48.884	59.118
18	19.615	21.412	23.414	25.645	28.132	30.906	33.999	37.450	41.301	45.599	55.750	68.394
19	20.811	22.841	25.117	27.671	30.539	33.760	37.379	41.446	46.018	51.159	63.440	78.969
20	22.019	24.297	26.870	29.778	33.066	36.786	40.995	45.762	51.160	57.275	72.052	91.025
25	28.243	32.030	36.459	41.646	47.727	54.865	63.249	73.106	84.701	98.347	133.334	181.871
30	34.785	40.568	47.575	56.805	66.439	79.058	94.461	113.283	136.308	164.494	241.333	356.787

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 1.5 等额多次支付(A)的现值系数 $P/A=(P/A;i;n)$(复利下)

利率 i / 周期 n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	24%	28%	32%	36%
1	0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909	0.893	0.877	0.862	0.847	0.833	0.806	0.781	0.758	0.735
2	1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736	1.690	1.647	1.605	1.566	1.528	1.147	1.392	1.332	1.276
3	2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487	2.402	2.322	2.246	2.174	2.106	1.981	1.868	1.766	1.674
4	3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170	3.037	2.914	2.798	2.690	2.589	2.404	2.241	2.096	1.966
5	4.852	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791	3.605	3.433	3.274	3.127	2.991	2.745	2.532	2.345	2.181
6	5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.766	4.623	4.486	4.355	4.111	3.889	3.685	3.498	3.326	3.020	2.759	2.534	2.339
7	6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868	4.564	4.288	4.039	3.812	3.605	3.242	2.937	2.678	2.455
8	7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335	4.968	4.639	4.344	4.078	3.837	3.421	3.076	2.786	2.540
9	8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759	5.328	4.946	4.607	4.303	4.031	3.566	3.184	2.868	2.603
10	9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145	5.650	5.216	4.883	4.494	4.193	3.682	3.269	2.930	2.650
11	10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495	5.938	5.453	5.029	4.656	4.327	3.776	3.335	2.978	2.683
12	11.255	10.575	9.954	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814	6.194	5.660	5.197	4.793	4.439	3.851	3.387	3.013	2.708
13	12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.103	6.424	5.842	5.342	4.910	4.533	3.912	3.427	3.040	2.727
14	13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	8.786	7.367	6.628	6.002	5.468	5.008	4.611	3.962	3.459	3.061	2.740
15	13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.559	8.060	7.606	6.811	6.142	5.575	5.092	4.675	4.001	3.483	3.076	2.750
16	14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.312	7.824	6.974	6.265	5.669	5.162	4.730	4.033	3.503	3.088	2.758
17	15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.554	8.022	7.120	5.373	5.749	5.222	4.775	4.059	3.518	3.097	2.763
18	16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201	7.250	6.467	5.818	5.273	4.812	4.080	3.529	3.104	2.797
19	17.226	15.678	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365	7.366	6.550	5.877	5.316	4.844	4.097	3.539	3.109	2.770
20	18.046	16.351	14.877	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.128	8.514	7.469	6.623	5.929	5.353	4.870	4.110	3.546	3.113	2.772
25	22.023	19.523	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.823	9.077	7.843	6.873	6.097	5.467	4.948	4.147	3.564	3.122	2.776
30	25.808	22.397	19.600	17.292	15.373	13.765	12.409	11.258	10.274	9.427	8.005	7.003	6.177	5.517	4.979	4.160	3.569	3.124	2.778

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

若一次投入资金 P，在今后 n 年内每年末提取等额资金 A，至 n 年末全部提取完毕，其现金流量图如图 1.3 所示，并有

$$P(1+i)^n = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \cdots + A(1+i) + A$$

由此得到

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = (\frac{A}{P};\ i\ ;\ n) \tag{1.23}$$

系数

$$\frac{A}{P} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

称为等额多次支付资金回收系数，它是表 1.5 上数值的倒数。

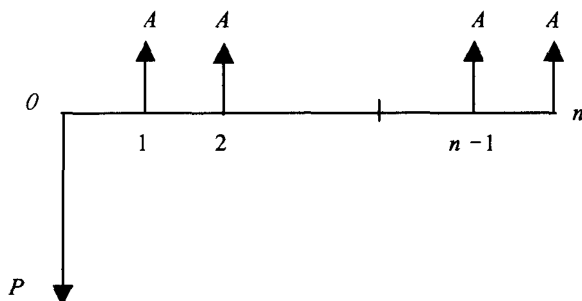


图 1.3　等额多次提取现金流量图

1.3.3　等额还本系数

设一次得到资金 P，要在 n 年内偿还，偿还方式是使欠款均匀下降，即第一年末使欠款下降为 $\left(\frac{n-1}{n}\right)P$，第二年末下降

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为$\left(\frac{n-2}{n}\right)P$，……，到第 n 年末下降为零。其资金流量图如图 1.4 所示。显然，每年年末所偿还的金额是不同的。设第 j 年初尚欠款$\left(\frac{n-j+1}{n}\right)P$，则第 j 年末应欠款为$\left(\frac{n-j}{n}\right)P$，故第 j 年末应还款

$$A_j=\left(\frac{n-j+1}{n}\right)P(1+i)-\left(\frac{n-j}{n}\right)P$$

$$=\frac{P}{n}[(n-j+1)i+1] \tag{1.24}$$

系数

$$\frac{A_j}{P}=\frac{1}{n}[(n-j+1)i+1] \qquad j=1, \cdots, n \tag{1.25}$$

称为各年等额还本系数。

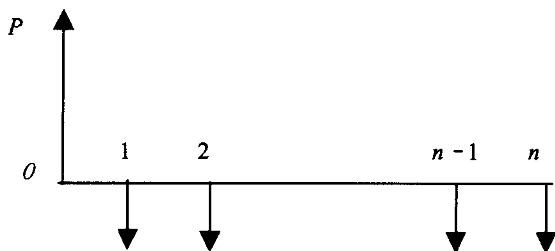


图 1.4　等额还本现金流量

以上各个计算公式 P 是在年初时发生的，F 是在 n 年末发生，而 A 是在每年年末发生，最后一个 A 与 F 同时发生。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

例 1 借款 10 000 元，年复利率为 6%，计息期为一年，计算 10 年内四种方案还本的现金流量。计算结果列于表 1.6。

表 1.6 现金流量计算

年度	年末	利息(元)	年末前欠款总额(元)	年末支付金额(元)	支付后年末尚欠款(元)
1. 每年年末只付息，不还本，期末还本	0 年末				10 000
	1 年末	600	10 600	600	10 000
	2	600	10 600	600	10 000
	3	600	10 600	600	10 000
	4	600	10 600	600	10 000
	5	600	10 600	600	10 000
	6	600	10 600	600	10 000
	7	600	10 600	600	10 000
	8	600	10 600	600	10 000
	9	600	10 600	600	10 000
	10	600	10 600	10 600	0
2. 等额年末支付	0				10 000
	1	600.00	10 600.00	1 358.68	9 241.32
	2	554.48	9 795.80	1 358.68	8 437.12
	3	506.23	8 943.35	1 358.68	7 584.67
	4	455.08	8 039.75	1 358.68	6 681.07
	5	400.86	7 081.93	1 358.68	5 723.25
	6	393.40	6 066.65	1 358.68	4 707.98
	7	282.48	4 990.45	1 358.68	3 631.77
	8	217.91	3 849.68	1 358.68	2 491.00
	9	149.46	2 640.46	1 358.68	1 281.78
	10	76.90	1 358.68	1 358.68	0
3. 等额偿还本金	0				10 000
	1	600	10 600	1 600	9 000
	2	540	9 540	1 540	8 000
	3	480	8 480	1 480	7 000
	4	420	7 420	1 420	6 000
	5	360	6 360	1 360	5 000
	6	300	5 300	1 300	4 000
	7	240	4 240	1 240	3 000
	8	180	3 180	1 180	2 000
	9	120	2 120	1 120	1 000
	10	60	1 060	1 060	0

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

年度	年末	利息(元)	年末前欠款总额(元)	年末支付金额(元)	支付后年末尚欠款(元)
4. 10 年末一次偿还	0				1 000
	1	600	10 600.00	0.00	10 600.00
	2	636.00	11 236.00	0.00	11 236.00
	⋮				
	9	956.31	16 894.80	0.00	16 894.80
	10	10176.69	17 908.49	17 908.49	0

1.3.4 等差支付序列

有些费用例如设备维修费每年都增加，若增加值不变，则开支或收入形成一个等差支付序列。设从第一年末开始的支付序列为 0，G，$2G$，…，$(n-1)G$ ，其现金流量如图 1.5 所示，则 n 年末的本利和可看成由$(n-1)$个等额支付现金流合成，即

$$F=G\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}+\frac{(1+i)^{n-2}-1}{i}+\cdots+\frac{(1+i)-1}{i}\right]$$

$$=\frac{G}{i^2}[(1+i)^n-ni-1] \tag{1.26}$$

此等差支付序列的现值为

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}=G[\frac{1}{i^2}-\frac{n}{i}(1+i)^{\ n}-\frac{1}{i^2}(1+i)^{\ n}] \tag{1.27}$$

等价于在 n 年内，每年末等额支付值为

$$A=F(\frac{A}{F};\ i\ ;\ n)=G\frac{(1+i)^n-ni-1}{i(1+i)-i} \tag{1.28}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

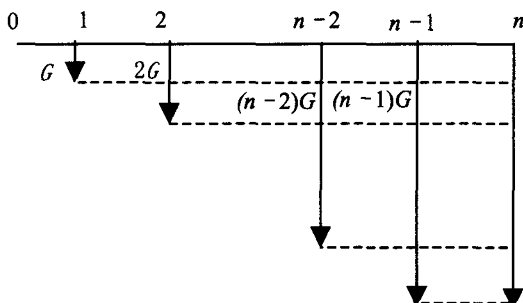


图 1.5 等差支付序列现金流量

例 2 某公司考虑购买一些尚未利用的城市土地，价格为 200 000 元。第一年支付地产税 4 000 元，以后每年增加 400 元，如果把这块土地买下，则需 10 年后方可以一个较好的价钱卖出。若这笔投资在税前要获得 15%的收益 $\frac{\text{利润}}{\text{投资}}$，预测 10 年后该土地的售价应为多少？

解：售价由三部分构成，A 为一次性支付的本金 200 000，B 为等额支付的地产税 4 000，C 为每年增加的等差支付的地产税 400 元，那么 10 年后应回收的本利和为

$$F = 200\,000(1+0.15)^{10} + 4\,000\frac{(1+0.15)^{10}-1}{0.15} +$$

$$\frac{400}{0.15^2}[(1+0.15)^{10} - 10\times0.15 - 1] = 917\,803$$

即售价应为 917 803 元。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

1.4 现值计算应用实例——收入流现值计算，奖券、债券、分期付款

例 1　收入流现值计算。设在一项资金活动中，现金流量是第 6 年末收入 300 元，第 9～12 年末收入 60 元，第 13 年末收入 210 元，第 15～17 年末各支付 800 元。第 12 年末前的利率为 5%，以后的利率为 7%，求相应于这个现金流量的现值 P。

为了提高计算速度和准确性，可将支付情形列表计算，如表 1.7 所示。

例 2　中彩得奖的实际价值

我们经常会听到宣传某某因买彩票而得大奖 100 万元，实际奖金究竟是多少呢？这类奖金有的并不是一次付清的，而是分期支付的。例如每年支付 5 万元，于 20 年内付清。若按年利率 10%计算，实际得到的奖金现值 P 为

$$P=5\frac{(1+0.1)^{20}-1}{0.1(1+0.1)^{20}}=42.57\text{ 万元}$$

故实际得奖不足 100 万元的一半。

例 3　债券现值计算

证券是承诺某种形式支付安排的金融工具，债券是其中之一，它通常由政府或公司发行，基本上是一种借款方式。有一种债券，发行者承诺每隔一定时间支付固定数量的利息 x，直到到期日为止。在到期日发行者将面值 F 及最后一期利息一起支付给债券持有人。设债券支付利息的期数为 n，市场利率为 i，面值为 F，那么债券持有者的收入流为$(x, \cdots, x, x+F)$，折算为现值为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 1.7 现值计算

年末	支付	现值计算
0		P_1=223.00 P_2=144.00 P_3=110.27 P_4=102.10
1		
2		
3		
4		
5		
6	300(一次支付)	300 × (P/F; 0.05,6) → P_1
7		0.7462
8		212.76 × (P/F; 0.05,8) → P_2
9	60	0.7462
10	60 (等额支付)	
11	60	60 × (P/A; 0.05,4) → 212.76
12	60	3.5460 198.05 × (P/F; 0.05,12) → P_3
13	210(一次支付)	210 × (P/F; 0.07,1) → 198.05 183.36 × (P/F; 0.05,12) → P_4
14		0.9731
15	80 (等额支付)	209.94 × (P/F; 0.07,2) → 183.36
16	80	80 × (P/A; 0.07，3) → 209.94
17	80	2.6243
	0 年末总现值	$P=P_1+P_2+P_3+P_4=579.37$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$P=\frac{x}{1+i}+\frac{x}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+i)^n}+\frac{F}{(1+i)^n}$$

$$=\frac{x}{\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}}+\frac{F}{(1+i)^n} \tag{1.29}$$

假使市场利率为 i，债券票面利率为 r，即 $x=Fr$ 由式(1.29)可得到债券现值为

$$P=F(1+i)^{-n}+Fr\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$=F+F(r-i)\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

例如，面值为 100 元的 5 年债券，每年付给 10 元利息，若市场利率为 9%，那么债券的现值为 103 元；若市场利率为 12%，那么债券的现值只有 93 元。债券的现值就应是它的发行价格，它将随着市场利率的波动而波动。一般地当 $r=i$ 时，债券应平价(即按面值)发行；当 $r<i$ 时，债券应折价发行；当 $r>i$ 时，债券应溢价(即超过面值)发行。就消费者而言，当发行人按债券现值销售债券，持有者购买债券的收益与储蓄持平。

例 4 分期付款利率计算

假使你借到一笔 10 000 元的分期偿还的款项，为此承诺每年还款 2 000 元，在 10 年内偿还。那么你所支付的利息是多少呢？

粗看起来，似乎是 10 年内偿还 20 000 元，因而支付的利息为 10 000 元，即每年支付利息为 1000 元，故利率为 10%。但这种分析是错误的，因为就全期而言，你借的 10 000 元，一年后就偿还了 2 000 元，除去利息 1 000 元(若仍按利率 10%计算)外。下一年你只借了 9 000 元了，故应按 9 000 元计息了。该项支付的现金流应为(10 000，−2 000，−2 000，…，−2 000)，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这里 $P=10\,000$ 而等额支付 $A=2\,000$ 元，故按公式(1.22)得

$$\frac{P}{A}=\frac{(1+i)^{-n}-1}{i(1+i)^{n}}$$

即

$$5=\frac{(1+i)^{10}-1}{i(1+i)^{10}}$$

由此可得 $i=15\%$，即实际支付的利率高达 15%，如果我们每年只支付利息 1000 元，10 年末还本付息，那么偿还的总货币量仍为 20000 元，但利率只有 10%，因而不同的偿还方式承担的利率是不同的。

1.5　投资收益率与益本比

在用货币单位对投资项目进行衡量时，除考虑时间因素外，还有两个重要指标需要考虑，这就是投资的收益率和益本比。

1.5.1　投资收益率

投资项目在 0 年末的投资为 I_0，以后各年末的收入分别为 R_1，R_2，…，R_n，支出分别为 D_1，…，D_n(只包括实际成本，不包括折旧费及借款利息)，如果贴现率(即市场利率)为 i，则第 n 年末该项目的现值为

$$P=-I_0+\sum_{t=1}^{n}\frac{(R_t-D_t)}{(1+i)^t} \tag{1.30}$$

显然，P 是 i 的函数，其关系可用图 1.6 表示。当 i 非常大时 $\sum_{t=1}^{n}\frac{(R_t-D_t)}{(1+i)^t}$ 变得很小，使 P 成为负值，当 i 趋于 -1 时，P 趋

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

于正无穷大。对于投资后现金由负值转化为正值的项目而言，总存在一个使现值为 0 的 i，即流入现金现值总额与流出现金现值总额相等的利率：

$$-I_0+\sum_{t=1}^{n}\frac{(R_t-D_t)}{(1+i)^t}=0 \qquad (1.31)$$

这个 i_0 称为该项目投资的收益率(IRR)(或称利润率、报酬率，也称内部收益率)。

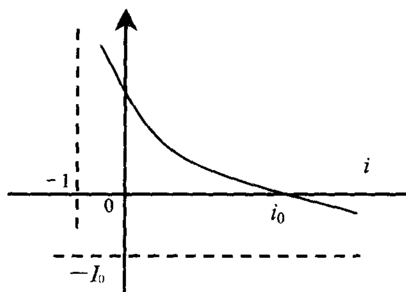


图 1.6 现值与贴现率关系图

评估项目投资效益时收益率是一项重要指标，只有当收益率大于某个基准值或贷款利率时，该投资方案才是可行的。目前发达国家的投资收益率约为 12%～20%。发展中国家一般为 8%～15%。计算收益率时通常采用迭代法或试算法，或直接查表，用内插方法得到。

例 1 有一笔 50 000 元投资，期望 15 年间每年有 7 000 元收益。求该项投资的收益率

解：本金 $P=50\,000$ 元，$n=15$，等额年现金流量 $A=7\,000$，那么，

$$-P+\sum_{t=1}^{n}\frac{A}{(1+i_0)^t}=0$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\frac{A}{P}=\frac{i_0(1+i_0)^n}{(1+i_0)^n-1}，\quad \frac{A}{P}=0.14$$

经计算得 $i_0\approx11.1\%$。

例2 某钢铁公司轧钢厂发行内部股票，利率25%，即1 000元股票年付息250元。到轧钢设备报废前一直可以提取股息，设备报废后不退还本金。现要按收益率10%以及可能获取股息的年数对此股票评估。

解：按收益率为10%，每1 000元股票等额支付 n 年的现值为 $P=250\dfrac{1.1^n-1}{0.1\times1.1^n}$，那么当

$n=20$ 时 $P=2\ 128$ 元，$n=10$ 时 $P=1\ 536$ 元

$n=6$ 时 $P=1\ 088.8$ 元，$n=5$ 时 $P=948$ 元

故只要设备使用超过5年，购买这种股票均能达到预期收益率。

1.5.2 益本比

收益与成本之比称为益本比。益本比也就是每元投资所创造的现值，故也称盈利能力指数：

$$PI=\frac{\left[\dfrac{\sum_{t=1}^{n}(R_t-D_t)}{1+i}\right]}{I_0} \tag{1.32}$$

当 $PI>1.0$ 时，投资具有正现值，故此投资项目可以考虑接受。

在计算益本比时，要考虑有时投资人和收益人有可能不是同一部门。例如政府投资建设并支付公路维修费用，以减少公路事故、车辆损伤，从而减少当事人的货币支出，而运输部门从而获得大量收益，这些收益往往难以全面衡量，因此在评价

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

益本比时，评价人的立场观点是很重要的。

1.6 投资决策准则及评估实例

在确定投资项目时，无论是国有企业或者合资企业甚至是个人投资者，均需回答：为什么要上此项目？为什么用这种方式上？当有多个方案时更需要进行详细比较，找出其后果的差异，并进行方案排序。本节介绍从经济分析角度对投资项目进行排序的定量准则，以下各章节将进一步介绍较为复杂情形下各种评估方法。

1.6.1 现金流量评估准则

(1) 净现值比较法；
(2) 收益率比较法；
(3) 益本比(即盈利能力指数)比较法。

例 1 设要对一条郊区公路进行改造，按 $i=7\%$，$n=20$ 年对三个投资方案(分别记为 H、J、K)进行研究，三个方案的主要特点及经济指标列于表 1.8。

表 1.8 方案经济指标

方案特点	初期投资(万元)	20 年后残值	年维护费	使用者支付年使用费(万元)
H 维持现有线路，翻修路面	11 000	0	3 500	第一年 21 000， 1～10 年每年增值 1 000， 1～20 年每年 30 000
J 新线路	70 000	30 000	2 100	第一年 15 750， 1～10 年每年增值 750， 1～20 年每年 22 500
K 短线路，高质量路面	130 000	55 000	1 700	第一年 13 650， 1～10 年每年增值 650， 1～20 年每年 19 500

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(1) 有关费用现值比较

各方案的现值计算列于表 1.9。这里第一项现值按[投资－$\dfrac{残值}{(1+0.07)^{20}}$]求得。维护费现值按[年维护费×$\dfrac{1.07^{20}-1}{0.07\times1.07^{20}}$]求得。公路使用费现值按[(1～10年等额支付现值)＋(1～10年等差支付现值)＋(10～20 年等额支付现值)]求得。

表 1.9 现值计算

路线	H	J	K
投资－残值后的现值	11 000	60 247	115 787
维护费现值	37 079	22 247	18 010
公路使用费现值	282 320	211 740	183 508
总计	330 399	296 234	317 305

从现值比较表看出，线路 J 是总现值最低的方案。

我们还可将所有费用都折算为等额年支出费用，比较其每年之等额支出(表 1.10)，可以看出方案 J 的等额年支出费用最少。

表 1.10 等额年支出费用表

路线	H	J	K
等额年投资	1 038.29	5 875.49	10 929.13
等额年维护费	3 500.00	2 100.00	1 700.00
等额公路年使用费	26 648.18	26 648.18	17 321.32
总计	31 186.47	27 961.13	29 950.45

注：计算公式见公式(1.21)、公式(1.28)。

(2) 收益率比较

1) 路线 H 与 J 的比较

路线 J 的初期投资较 H 多 59 000 万元，作为该项投资的回报是以后各年等额年费用比 H 减少了，减少值为

3 500.00＋26 648.18－(2 100.00＋19 986.14)＝806 2.03 万元

减少的值可以看成是 59 000 万元投资的回报，即

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$59\ 000\times\frac{i(1+i)^{20}}{(1+i)^{20}-1}=8\ 062.04$$

得到 i=12.31%。即可以 12.31%的收益率回收 5.9 亿元投资。因为它超出预定的利率 7%，故 J 路线优于 H 路线。

2) 路线 K 与 J 的比较

路线 K 的初期投资较 J 多 60 000 万元，而以后各年等额年支出费用之差为

(210 000＋19 986.14)－(1 700＋17 321.32)＝3 064.82

当收益率为 i 时

$$60\ 000\times\frac{i(1+i)^{20}}{(1+i)^{20}-1}=3\ 064.82$$

得到 i=3%。收益率低于 7%，故路线 J 较 K 为优。

(3) 益本比计算

为了计算益本比，首先要划分哪些是收益，哪些是成本。譬如一笔不利款项可划入负收益，也可划入成本，由此可以得到不同的益本比。

本题我们着重的是比较方案，因此只需作相对比较。我们将两个方案的初期投资及年维护费总现值之差作为成本 C，而将由此获得的使用费之预期节约作为收益 B。

1) 路线 J 与路线 H 的比较

B＝282 320－211 740＝70 580 万元，

C＝(62 247＋22 247)－(11 000＋37 079)＝36 415 万元

因为 $\frac{B}{C}$=1.94>1，故 J 路线为优。

2) 路线 K 与路线 J 的比较

B＝21 1740－183 508＝28 232 万元，

C＝(115 787＋18 010)－(62 247＋22 247)＝49 303 万元

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

因为$\dfrac{B}{C}=0.57<1$，故K路线较路线J为差。由上可见，J路线为最优。

如果将等额年支出费用中初期投资及年维护费之差作为成本C，而将等额公路所有费用的预期节约作为收益B，那么由表1.10可得路线J对路线H的$\dfrac{B}{C}=1.91>1$，故J较H为优；路线K对路线J的$\dfrac{B}{C}=0.57<1$，故J较K为优。

例2 设有A和B两个项目可投资，它们的现金流量列于表1.11，对这两个项目进行比较。假设贴现率为20%。

由于两个项目有不同的寿命，直接用现值或收益率进行比较是不合适的。考虑项目B在第2年后可以继续进行投资，其结果如表1.11上第三、四行所示。比较结果可见项目B优于项目A。这种比较方法要使投资项目寿命相同，有时计算会很冗长。例如一个7年寿命的项目与一个9年寿命的项目相比较，则需计算63年。在这种情形下，我们可以用等价等额年收入进行比较，由式(1.21)得到

$$A=P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

表1.11 现值及收益率计算

项 目	年现金流量(万元)					现值	收益率(%)
	0	1	2	3	4		
A	-100	10	10	10	200	17.5	25
B	-100	120	21.6	0	0	15	36
B二次投资			-100	120	21.6		
B的总投资	-100	120	-78.4	120	21.6	25.4	35

于是算出：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

项目 A：等价等额年收入为 $\dfrac{17.5}{2.5887}=6.8$ 万元；

项目 B：等价等额年收入为 $\dfrac{15}{1.5278}=9.8$ 万元，

故项目 B 优于项目 A。

用以上三种方法进行投资评估时，能得到相同的投资的信息，但当方案众多时，有可能得到不同的排序。

1.6.2 偿还期准则

偿还期准则是许多投资者所使用的一个很简单的准则。按照这一准则，可以在许多供选择的项目中，挑选出能最快偿还投资的项目。为计算偿还期，首先要算出毛利，毛利是指每年收入与支出的差额(这里支出只计实际支出)，年平均毛利是指各年毛利的平均值。而

$$偿还期=\frac{投资额}{年平均毛利} \tag{1.33}$$

例 3 设某项目需 10 万元投资，每年收入与支出现金流量如表 1.12 所列。

表 1.12 例 3 的收入与支出的现金流量

年度	收入(元)	支出(元)	毛利(元)
1	25 000	18 000	7 000
2	30 000	19 000	11 000
3	35 000	20 000	15 000
4	37 000	20 000	17 000
5	37 000	20 000	17 000
6	37 000	20 000	17 000
7	37 000	20 000	17 000
8	35 000	20 000	15 000
9	34 000	21 000	13 000
10	33 000	20 000	11 000
平均	34 000	20 000	14 000

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

于是偿还期 $t=\dfrac{1000000}{14000}\approx 7.1$ 年。

只要获得毛利的时间至少能到足以回收投资的那一年，这一准则总可以方便地使用，并可立即排除那些偿还期大于项目寿命的项目。对于投资机会很多而资金有限的公司，偿还期可能是一个很有效的准则。例如对于希望在短期内(例如两年内)能回收资金的公司，可以用此准则排除偿还期超过两年的项目。

但是应用偿还期准则时应综合考虑项目寿命以及利润按年分配的情形，否则会得出错误的结论。下面的例子可以说明这一点。

例 4 假如有 A、B、C 三个项目可以投资，它们均需投资 10 万元，各项目指标如表 1.13 所示。

表 1.13 项目 A、B、C 的经济指标

指 标	项目 A	项目 B	项目 C
所需投资	100 000	100 000	100 000
平均年毛利(元)	25 000	25 000	33 330
项目寿命(年)	5	8	3
总毛利(元)	125 000	200 000	100 000
偿还期(年)	4	4	3

从表 1.13 可看出，项目 B 是 3 个项目中最佳的，因为它在 8 年时间里可获得毛利 20 万元，但是若根据偿还期准则就会选择 C。事实上项目 C 毫无利润可言，好比它借出 10 万元，每年无利息地收回 33 330 元，3 年后还完。相反的项目 A、B 却都赚到了钱，另外如果不考虑项目 C，在项目 A、B 之间也很难根据偿还期作出选择，因此在使用偿还期准则时应要求各项目有大致相同的寿命。另外由于计算中未考虑到毛利的时间效应，故结果比较粗糙。如果贴现率 i 已知，那么在式(1.30)中，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

令 $$-I_0+\sum_{t=1}^{n}(R_t-D_t)/(1+i)^t=0 \tag{1.34}$$

年数 n 就是考虑到现值的偿还期，n 可用试算方法得到。

偿还期方法的另一缺点是未考虑到偿还期结束后可能发生的情形，而一个项目的真正价值往往取决于偿还投资后能赢利多少。由于上述这些问题，偿还期准则往往不能作为投资决策的最后准则，而只能在选择方案时起辅助作用。

1.6.3 其他经济指标评价法

当对投资方案进行经济比较时，在初始阶段可以利用一些简单的单纯评价因子组成的公式，算出评价指数。公式中所用的参数由主观给出的评价值或由经验数据给定，最后由评价指数的大小，对方案进行排序。下面介绍几种常用方法。

(1) 奥尔森(OLSEN)公式

此公式由美国“奥林·曼特森”公司开发，用于评价新产品开发方案、老产品改进方案以及工艺改革方案。评价指数 U 为

$$U=\frac{Hp}{H_u} \tag{1.35}$$

式中：H——新产品投资后年净收益总额；

P——成功概率；

H_u——研究总费用。

(2) 伯西非柯(PACIFICO)公式

该式由美国阿尔柯拉克公司开发，多用于长期开发方案以及风险小的项目。评价指数为

$$U=R_CR_t(P-C)\frac{VL}{H_u} \tag{1.36}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

式中：R_C——商业成功概率(0.1～1)；

R_t——技术成功概率(0.1～l)；

P——产品价格；

C——制造和销售成本；

L——产品的商业寿命；

V——产品寿命；

H_u——总费用(包括研究，设施，开发市场等总费用)。

(3) 安索夫(ANSOFF)公式

该公式将经济分析与决策相结合，其评价指标为

$$U=(\frac{ER_CR_t}{CJ})\times(M_t+M_b)S \tag{1.37}$$

式中：E——产品寿命周期内的总利润；

R_C，R_t——与伯西非柯公式定义相同；

C——包括直接投资在内的总费用；

J——C 的节约系数；

M_t、M_b——分别为技术性能和经营性能适应能力系数；

S——推荐方案与现有方案的一致性系数。

(4) 简单利润率法

不考虑时间因素的作用，只考虑方案的净利润与总投资之比：

$$R=\frac{(N_p+I)}{K}\times100\% \tag{1.38}$$

式中：R——简单利润率；

N_p——净利润(扣除折旧、利息和税收后利润)；

K——总投资(固定资产＋生产前投资费＋流动资金)

I——所得利息。

还有一些评价公式，但基本上大同小异，这里不再赘述，读者可参阅有关文献。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在结束本节之际，应该指出，尽管我们讨论了各种应当考虑的经济准则，但在作出投资决策时，事实上还必须考虑一些不能量化的因素。例如受长期战略考虑的支配，一家公司为避免被潜在竞争对手挤出市场，可能建造一座生产能力超过预期需要，因而可能亏损的附属工厂；一家公司可能买下土地房屋准备将来发展使用，而这一投资的好处在当时却显示不出；同样地一家公司每年为科学研究拨出大笔经费，尽管这种支出的直接效益很难确定。另外公司的商业地位、工作环境以及对职工的吸引力等，对于投资者来说都会有重要影响，因此在进行经济分析的同时要全面考虑各种社会的、政治的和心理的因素，最终才能作出正确决策。

1.7　消费偏好、无差异曲线与效用函数

在讨论投资时，必然会涉及人们的消费行为，很显然，人们不仅关心当前的消费还关心他们未来的消费，而投资的最终目的也是为了获得未来消费。究竟多少应该是现在消费，多少留待未来消费，取决于消费者对不同时期消费的偏好。本节将扼要介绍与此有关的消费偏好、无差异曲线以及效用函数的概念及应用。

1.7.1　消费偏好

首先我们把消费者所选择的消费目标称为消费点。为了简单起见，我们将可供选择的商品归为两类，以便在二维图上说明问题。令 x_1 代表一种商品的消费量，x_2 代表另一种商品的消费量，那么整个消费点就可在 x_1、x_2 平面上表示，并令 $X=(x_1, x_2)$表示一种消费点(或称消费束)。这里的商品是广义的，例如当前的消费量可作为 x_1，未来的消费作为 x_2。

假使有两个消费点 $X=(x_1, x_2)$、$Y=(y_1, y_2)$，那么消费者

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

可以根据自己的偏爱确定其中一个比另一个好，或者认为它们是无差异的。符号$\succ$表示两个消费点中一个是受到严格偏好的，因此$X\succ Y$解释为消费者对X的偏好甚于Y。如果消费者对X、Y感到同样满足，那么就说消费点X、Y对这位消费者来说是无差异的，并用$X\sim Y$表示。如果消费者在X、Y之间有偏好，但又不大在乎，则记作$X\succ=Y$，表示对X的偏好弱甚于Y。严格偏好、弱偏好以及无差异具有下述关系：

若$X\succ=Y$，且$Y\succ=X$，则$X\sim Y$；若$X\succ=Y$，且不满足$X\sim Y$，则$X\succ Y$。

并满足下述公理：

(1) 完备性公理

任意两个消费点均是可比较的，即或者有 $X\succ=Y$，或者有$Y\succ=X$，或者两种关系均存在，此时X与Y无差异；

(2) 反身性公理

任何消费点至少与本身是同样好的，即$X\sim X$；

(3) 传递性公理

如果$X\succ=Y$，$Y\succ=Z$，则有$X\succ=Z$。

1.7.2 无差异曲线

取某个消费点$X=(x_1, x_2)$，把其他至少与(x_1, x_2)受相同偏好的一切消费点在x_1、x_2平面上用阴影表示，称之为弱偏好集，在这个集合分界线上的消费点，它们与消费点X是无差异的，组成了一条无差异曲线。在无差异曲线上有时还可以画上垂直箭头，表示更受偏爱的消费点方向(图 1.7)。

显然无差异曲线因人而异。根据偏好传递性公理容易证明任何无差异曲线是不可能相交的。

无差异曲线可以按下述步骤得出：先在图上定下某个消费点$X=(x_1, x_2)$，然后给消费者稍微增加一点商品 1 即Δx_1，那么问消费者的商品 2 即Δx_2应如何变动可使新的消费点$(x_1+$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Δx_1，$x_2+\Delta x_2$)与消费点(x_1，x_2)无异，这样就得到了无差异曲线上的一个新点，以此类推，直到作出一条清晰的无差异曲线。

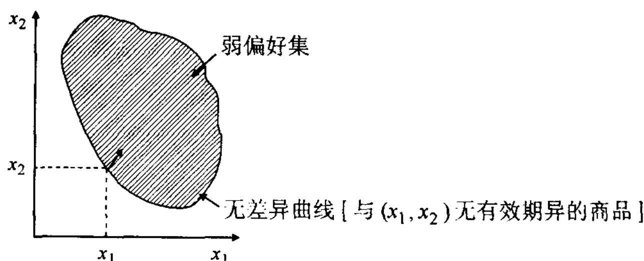


图 1.7 无差异曲线与弱偏好集

下面给出几种典型的无差异曲线。

(1) 完全可替代商品

当消费者愿意按一定比率用(x_1，x_2)中一种商品去替代另一种商品时，这两种商品是完全可替代的，其斜率为负值，增加偏好方向朝右上方，图 1.8(a)上表示了斜率为－1(即替换比率为1)的无差异曲线。

(2) 完全互补性商品

当两种商品始终按固定的比例一起消费时称为是完全互补的。例如左鞋的数量始终与右鞋数量相同。当左鞋数量不变而右鞋数量增加时其偏好性不会变化，故无差异曲线呈 L 状，如图 1.8(b)所示。

(3) 厌恶性商品

设两种商品中有一种(设为 x_2)是消费者厌恶的，那么当不得不消费此商品时必须增加另一种商品 x_1 作为补偿才能使消费者感到无差异。此时无差异曲线向右上方倾斜，增加偏好方向朝右下方，如图 1.8(c)所示。

(4) 中性商品

消费者不在乎其多少的商品称为中性商品，即该商品的增

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

加或减少不影响消费者的偏好。图 1.8(d)上表示了 x_2 为中性商品时的无差异曲线，它是一系列平行的垂直线。

(5) 具有最佳消费点的商品

当消费者具有一个最佳消费点并且离该消费点越近越受偏爱时，无差异曲线是围绕着这个最佳点的封闭曲线[图 1.8(e)]。

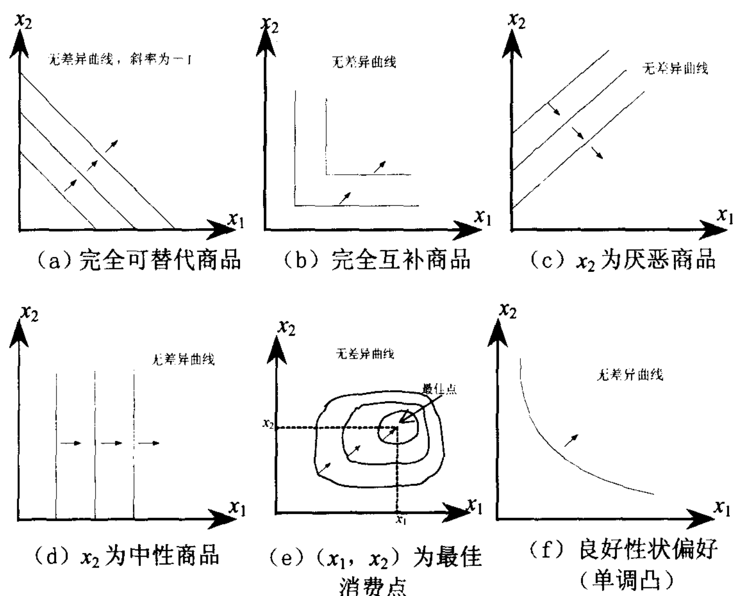


图 1.8 无差异曲线形状

在众多形状无差异曲线中，满足良好性状偏好假设的无差异曲线具有最广泛的应用。一个良好性状偏好要满足下述假设：

(1) 偏好的单调性，较多商品的消费点优于较少商品的消费点，即$(x_1, x_2) \succ = (y_1, y_2)$当且仅当$(x_1, x_2) \geqslant (y_1, y_2)$。这意味着在无差异曲线上 x_1 增加时 x_2 应减少，故无差异曲线的斜率是负的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(2) 平均消费点比端点消费点受偏爱，假使在无差异曲线上有两点$(x_1，x_2)$、$(y_1，y_2)$，那么对任意 $t\in(0，1)$有$[tx_1+(1-t)y_1，tx_2+(1-t)y_2]\succ= (x_1，x_2)$。这表示无差异曲线是凸的。我们把这种偏好称为凸状偏好。如果平均消费强偏好于端点消费则无差异曲线是严格凸的，图 1.8(f)上表示了良性偏好的无差异曲线形状。今后，没有特殊说明我们总用它作为无差异曲线的形状。

1.7.3 效用与效用函数

效用是描述消费偏好的一种方式。效用函数为每个可能的消费指派一个数字，使指派给较多偏好的消费点的数字大于受较少偏好的消费点的数字。令 $u(x_1，x_2)$表示消费点$(x_1，x_2)$的效用，那么$(x_1，x_2)\succ(y_1，y_2)$当且仅当 $u(x_1，x_2)\succ u(y_1，y_2)$。效用函数的数值只是在对不同消费点进行排序时才有意义，故被称为序数效用。这样，实际上就可找到无限多种指派效用的方法。若 $u(x_1，x_2)$是表示某种偏好$\succ=$的效用函数，那么它的任一单调变换 $f(u)=f(u(x_1, x_2))$当且仅当 $u(x_1, x_2)\succ u(y_1, y_2)$时有 $f(u(x_1，x_2))>f(u(y_1，y_2))$，从而当且仅当$(x_1，x_2)\succ(y_1，y_2)$时有 $f(u(x_1，x_2))>f(u(y_1，y_2))$。由此可得出：“一个效用函数的单调交换还是一个效用函数，并且这个效用函数代表的偏好与原效用函数所代表的偏好相同”。

给出效用函数 $u(x_1，x_2)$后，使 $u(x_1，x_2)= c$ 的所有消费点$(x_1，x_2)$的集合称为水平集合，水平集合内的点均在同一条无差异曲线上。

效用函数可根据所消费商品的特性选择，例如对于完全可替代商品可用如下形式的效用函数描述：

$$u(x_1，x_2)=ax_1+bx_2$$

这里 a、b 是度量商品 1 和商品 2 对于消费者的“价值”的某个

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

正数，其无差异曲线的斜率为$-\dfrac{a}{b}$。

对于完全互补商品，效用函数可采取

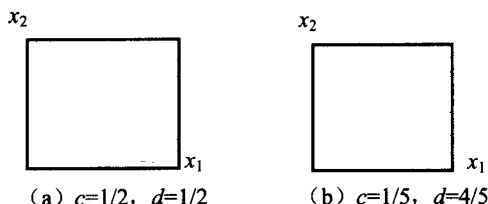
$$u(x_1, x_2)=\min\{ax_1, bx_2\}$$

式中，a 和 b 是说明商品消费比例的正数。

一种普遍使用的效用函数是柯布—道格拉斯效用函数，其形式为

$$u(x_1, x_2)=x_1^c\, x_2^d \tag{1.39}$$

式中，c 和 d 都是正数。图 1.9 中画出了取不同 c、d 的无差异曲线。



（a）c=1/2，d=1/2　　（b）c=1/5，d=4/5

图 1.9　柯布—道格拉斯无差异曲线

柯布—道格拉斯无差异曲线与前面提到的性状良好的凸性、单调无差异曲线类似，是性状良好的无差异曲线的标准范例。

1.8　投资和融资决策分离理论

现代社会的人们既要进行当前消费又要为未来消费作投资，因而人们既是消费者又是投资者，那么应如何确定个体的当前消费与投资的最佳状态呢？是否只有当前消费者所拥有的财富超过当前所需消费时才有可能成为一个投资者呢？是否允许既有投资又有融资状态存在呢？本节就来讨论消费、投资、

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

融资之间的关系。为讨论简单起见，我们只考虑两期消费即当前消费和下期消费，并用横轴表示当前消费 x_1(看作商品 1)、纵轴表示下期消费 x_2(看作商品 2)。

1.8.1 不考虑时间效应

设某投资人拥有财富 W_0，x_1 为本期消费，那么用 W_0-x_1 进行投资，可获得下期消费 x_2，对不同的 x_1 可得到曲线 $W_0\ W'_0$，$W_0\ W'_0$ 为投资人的投资曲线(图 1.10)。同时将(x_1，x_2)作为商品 1 和商品 2，那么可以得到一组关于消费点(x_1，x_2)的效用无差异曲线 u，其中有一条与投资曲线 $W_0\ W'_0$ 相切于 C^*。对应的消费点(c^*_1，c^*_2)既是最佳消费状态又是最佳投资状态。本期消费量为 c^*_1 投资额为 $I_0=(W_0-c^*_1)$，下期消费为 c^*_2。

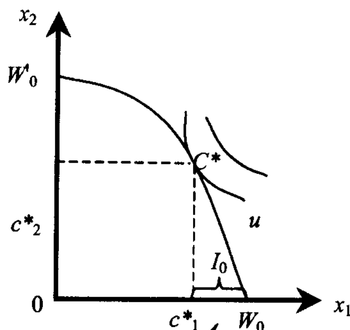


图 1.10 最佳投资与消费点 C^*（不考虑时间效应）

1.8.2 考虑时间效应

现考虑时间因素的影响，那么今天消费 1 元与下期消费 1 元的价值不同。假设市场利率为 r，那么消费点(x_1，x_2)的净现值 NPV 应为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathrm{NPV}=x_1+\frac{x_2}{1+r}$$

即

$$x_2=\mathrm{NPV}(1+r)-(1+r)x_1$$

可见 x_1 与 x_2 呈线性关系，其斜率为$-(1+r)$，截距为 NPV$(1+r)$。对于不同的净值，得到一组平行线，且向右上方平移时，NPV 值加大，这组平行线称为等现值线[图 1.11(a)]，投资决策应使现值最大，等现值线与投资曲线的切点为 C^*，那么消费点(c^*_1, c^*_2)就是使现值最大的投资状态，投资额应为 $I_0=W_0-c^*_1$。但 c^*_1 并非最佳本期消费。最佳消费应与效用无差异曲线有关，无差异曲线与该等现值线的切点决定了最佳消费状态。根据切点的位置我们分两种情形讨论。

(1) 情形 1

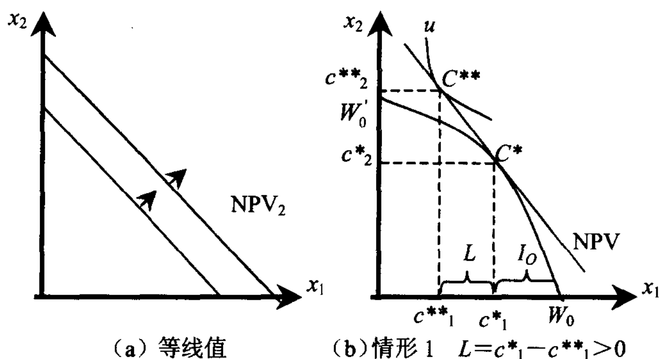
无差异曲线与等值线的切点 C^{**}位于 C^*的左上方，消费者偏爱于未来消费[图 1.11(b)]。当前的最佳投资为 $I_0=W_0-c^*_1$，当前最佳消费为 c^{**}_1，余额 $L=c^*_1-c^{**}_1$，应存入银行或贷出生息，使下期可得到 c^{**}_2。

(2) 情形 2

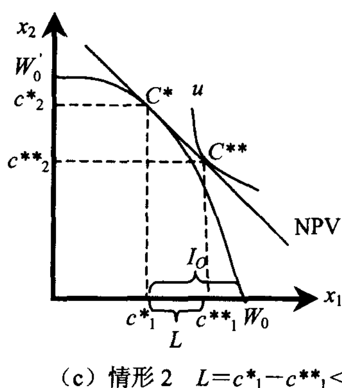
此时无差异曲线与等现值线的切点 C^{**}在 C^*右下方。消费者偏爱于当前消费[图 1.11(c)]。其投资额为 $I_0=W_0-c^*_1$，当前最佳消费为 c^{**}_1，融资额为 $c^{**}_1-c^*_1$，即当前消费不足部分应借钱补足。

上述两种情形中，投资额都是 $I_0=W_0-c^*_1$，与融资与否无关。消费者为保持最佳状态，同时可以投资又可融资。投资与融资决策可分开进行。这就是投资与融资决策分离理论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net



（a）等线值　　（b）情形 1　$L=c^{*}_1-c^{**}_1>0$



（c）情形 2　$L=c^{*}_1-c^{**}_1<0$

图 1.11　消费、投资与融资的确定（考虑时间效应）

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第 2 章　确定资本预算的数学规划方法

资本预算方法是从一系列可供选择的投资项目中确定一种最优投资组合的方法。所谓最优投资组合是指在一定的约束条件下(包括资金数额或其他资源的限制、各投资项目的相互依存关系的限制等)使投资人具有最大收益的资金分配方式。当投资者的目标与约束均可用线性函数表示时，线性规划方法是确定最优投资组合的有效方法。它与其他方法相比，考虑的问题更细致全面，因而得到的解更具有最优性。例如常用的排序方法(见第 6、7 章)一般总是根据投资项目的预期贡献确定其优先投资次序，但投资一个具有较大贡献的大项目往往以牺牲若干个小项目为代价，而投资这些小项目的组合的总贡献却有可能超过前者。线性规划方法就往往是一种确定最优投资组合的有效手段。

线性规划方法的缺点是在某些情形下可能得到与实际情形不符合的非整数解。例如我们要确定是否要投资购买汽车，得到的最优解却是购买 $\frac{1}{3}$ 辆汽车。这当然是不可能的。为了弥补这一不足，我们在本章的第 2.4 节引入了整数规划方法。

在考虑投资问题的资本预算时，问题的目标可能不止一个，此时应用目标规划方法可以得到更切合实际的结果，关于目标规划方法我们将在第 8 章介绍。本章最后一节将对资本预算中数学规划的应用前沿作概要介绍。

本章的目的主要在于介绍各种资本预算的线性模型。考虑

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

到线性规划方法作为一种最优化模型已得到广泛应用与介绍，本书对其一般原理与方法不再进行详细介绍。有兴趣的读者可参考有关书籍及相应的应用软件。

2.1 线性规划的数学模型

2.1.1 实例

我们用一个投资实例说明线性规划(LP)模型。假使有两个项目可以投资。令 x_1、x_2 分别为对两个项目的投资单位数。对第一个项目的每单位投资第一年需资金 2(万元)，第二年需资金 4(万元)，总计每单位投资可获得净现值 6(万元)；对第二个项目的每单位投资第一年需资金 3(万元)，第二年需资金 1(万元)，总计每单位投资可获得净现值 3(万元)，总可用的资金第一年为 12(万元)，第二年为 8(万元)，第一年未用完资金不允许带入第二年使用，投资量要求非负，那么确定最优投资组合的模型为

$$\max \quad z = 6x_1 + 3x_2 \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \tag{2.2}$$

$$4x_1 + x_2 \leqslant 8 \tag{2.3}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \tag{2.4}$$

公式(2.1)称为目标函数，其中 x_1、x_2 分别为对第一、第二个项目的投资单位，称为决策(或称控制)变量。式(2.2)～式(2.4)为约束方程，其中式(2.4)是变量非负约束。由于该例中只有两个变量，故可用图解法求解，在 x_1、x_2 平面上满足约束条件的区域称为可行域，可行域内的点称为可行解[图 2.1(a)]，在可行域内使目标函数达到最大的解称为最优解。

为了求出最优解，我们来研究函数 $z = 6x_1 + 3x_2$，将 z 看作参数，那么对于不同的 z，它是平面上一簇平行线[图 2.1(b)]，在同一条直线上，目标函数值都相等，故它们也称等值线。当

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

平行线向右上方移动时，目标函数值增加，而既与可行域相交，又使 z 值尽可能大的那条等值线，就是过点($x_1=1.2$，$x_2=3.2$)的等值线。因而最优解 $x^*_1=1.2$，$x^*_2=3.2$，最优值 $z^*=6\times1.2+3\times3.2=16.8$，即对项目Ⅰ投资 1.2 个单位，对项目Ⅱ投资 3.2 个单位，可达到最大净现值 16.8 万元。

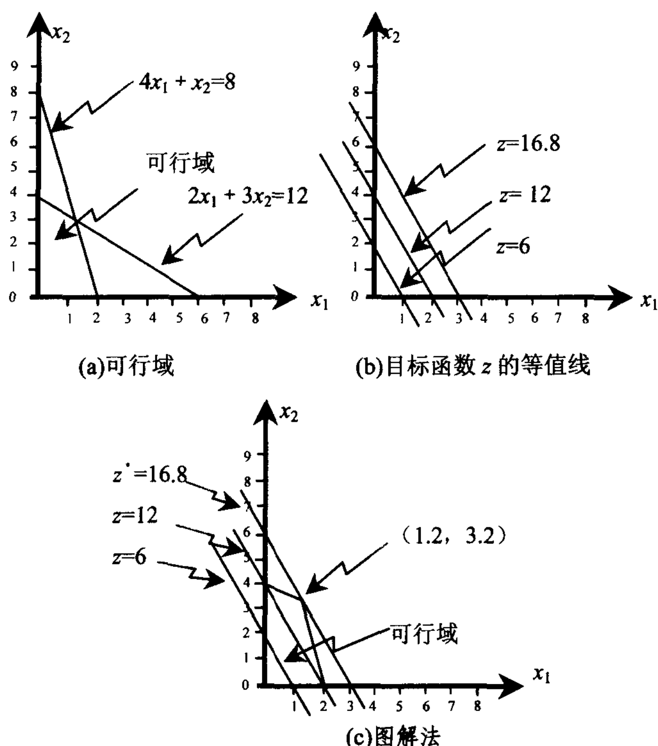


图 2.1 可行域与图解法

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

2.1.2 一般线性规划模型

我们以更一般的形式来描述有限资源下投资分配问题。其目标是使投资结果更为有效。作为投资问题的目标函数可以是：

(1) 应使投资项目的总净现值最大；

(2) 应使投资项目在未来某一时刻(例如 10 年末)的总值最大；

(3) 应使投资项目的期望风险最小。例如考虑若干个风险投资时，要使投资组合的报酬率的方差最小(关于用概率论方法估计投资项目风险问题，我们将在第 3 章中讨论)。

目标函数的选择与考虑的投资项目可采用的数据有关。例如当投资项目的期望报酬率的协方差数据已知时，可考虑使期望风险最小作为目标函数。如果没有这类数据则应取上面的 1 或 2 作为目标函数。当我们可以估计所涉及的投资项目的时间时，我们可取未来某一时刻的总值最大，否则我们就取总净现值最大。用不等式或等式表示的决策变量之间的关系，称之为约束。一般的线性规划模型要确定决策变量 x_1，…，x_n 使之满足

$$
\begin{aligned}
\text{max (mim)}z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

其中，某些 $x_j \geqslant 0$，某些 $x_j \leqslant 0$，某些 x_j 无符号约束。决策变量的符号由问题性质决定，当决策变量 x_j 表示对某个项目的可能投资时，那么 $x_j \geqslant 0$，当 x_j 表示两国之间贸易差额，那么就有可能取负值(对过去的某一状态)或符号不定(对未来状态)。式(2.5)中系数 a_{ij}、b_{ij}、c_j 均为已知参数，在作投资规划时，一般根据

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

未来情形预测得到，具有一定的不确定性。为此，需进一步作灵敏度分析、模拟分析及随机约束规划分析等。

2.1.3 线性规划的标准形式

上面提到的图解法只适用于两个变量的线性规划问题。对一般的 LP 问题的有效解法是众所周知的单纯形方法。绝大多数运筹学教本都对单纯形方法有详细介绍，本书不再介绍。用单纯形方法编制的计算机程序已得到广泛应用，用单纯形方法的修改形式即修正单纯形法编制的程序效率更高，所需的存储单元更少，可以解上千个约束的大型问题。使用这些程序时，必须把 LP 问题化为标准形式：

$$\max \quad (\min) \quad z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m; \tag{2.6}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

标准形式应满足：

(1) 所有决策变量均非负；

(2) 所有约束方程均为等式，且约束方程右端项均非负，即 $b_i \geqslant 0$，$i=1$，…，m；

(3) 某些程序中规定必须是求目标函数的最大(小)值。

任何线性规划问题均可通过适当变换化为标准形，具体的做法是：

(1) 化非正变量及无限制变量(称为自由变量)为非负变量。

若问题(2.5)中存在某个变量 $x_j \leqslant 0$，引入新变量 x'_j，使 $x'_j=-x_j$，那么有 $x'_j \geqslant 0$ 用 x'_j 代替式(2.5)中的所有 x_j。若存在某

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

个变量 $x_k' \gtrless 0$(即无符号限制)那么可定义两个非负变量，x'_k、x''_k，使 $x_k=x'_k-x''_k$。其中，$x_k'\geqslant 0$，$x_k''\geqslant 0$。用 $x'_k-x''_k$ 代替式(2.5)中所有 x_k，这样得到的新问题的所有变量均非负。

(2) 化右端项为正以及化不等式约束为等式约束。当右端项为负时将整个方程乘以(−1)；当 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_i$ 时，引入松弛变量 $s_i'\geqslant 0$，使方程成为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i + s_i = b_i \qquad s_i'\geqslant 0;$$

当 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \geqslant b_i$ 时，引入剩余变量 $s_i'\geqslant 0$，使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i - s_i = b_i \qquad s_i'\geqslant 0;$$

(3) 化求目标函数最大值(最小值)问题为最小值(最大值)问题。利用式

$\max \quad z = -\min(-z)$，将问题

$$\max \quad z$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i=1,\cdots,m \quad x_j\geqslant 0, \quad j=1,\cdots,n$$

化为 $\min \quad (-z)$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i=1,\cdots,m \quad x_j\geqslant 0, \quad j=1,\cdots,n$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

两者具有相同的最优解。

例 1 化下述线性规划问题为标准形。

$$\min \quad z = 3x_1 - 4x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_3 \leqslant 12$$

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geqslant 10$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \leqslant 0, \quad x_3 \gtreqless 0$$

引入 $x_2 = -x'_2$，$x_3 = x'_3 - x''_3$，$x'_2 \geqslant 0$，$x'_3 \geqslant 0$，$x''_3 \geqslant 0$ 以及松弛变量 $s_1 \geqslant 0$，剩余变量 $s_2 \geqslant 0$，得到

$$\min \quad z = 3x_1 - 4x'_2 + x'_3 - x''_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x'_3 - x''_3 + s_1 = 12$$

$$x_1 + 5x'_2 - 3x''_3 - s_2 = 10$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x'_2 \geqslant 0, \quad x'_3 \geqslant 0, \quad x''_3 \geqslant 0, \quad s_1 \geqslant 0, \quad s_2 \geqslant 0$$

此即为标准形式的 LP 问题。

2.2 资本预算的线性规划模型

本节介绍各种约束条件下的资本预算的线性规划模型。

2.2.1 在一定资本限额下的资本预算

有限额的资本预算有下述 4 类问题：

(1) 不允许借贷，净投资限额下的资本预算；

(2) 只允许贷出的资本预算；

(3) 只允许借入的资本预算；

(4) 既允许贷出又允许借入的资本预算。

这里假定资金流动周期与计划周期相同，各投资项目的现金流量在本期不考虑而在下期考虑。除非特别说明，均认为现金流量及未来的资本成本可在计划期预测，并在下一周期中看做常数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(1) 不允许借贷，净投资限额下的资本预算

1) 基本模型

假设某公司可投资于若干项目，各项目的现金流量及公司的资本成本均可预测，并可用它计算净现值。公司预期投资年限为 N 年，公司资金每年有固定的预算，各期预算及资本成本均不受前期投资影响。并假定上一年未用完的预算资金不可带入下一年使用。要在每年总现金流量不超过该年预算下确定投资组合，使其净现值最大。这里我们把流入的现金流量定义为正，流出的现金流量定义为负。

上述问题的基本 LP 模型为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{M} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & -\sum_{i=1}^{M} f_{it} x_i \leqslant b_t, \qquad t=1,\ \cdots,\ N \\
& 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \qquad i=1,\ \cdots,\ M
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

这里 p_i 为第 i 个项目的净现值，可根据现金流预测得到；f_{it} 为第 i 个项目在 t 年的预期现金流量，b_t 为 t 年可用的预算，M 为可供投资的项目数；x_i 为第 i 个项目的投资份额。这里规定对一个项目的投资份额不能超过 1。

2) 当有比资本更稀缺的资源限制时(如熟练工人、原材料和设备等)可加上约束方程

$$
\sum_{i} r_{ikt} x_i \leqslant R_{kt} \qquad t=1, 2, \cdots, N \tag{2.8}
$$

这里 R_{kt} 为第 k 种资源 t 年的可用量；r_{ikt} 表示第 i 个项目在 t 年内所需的资源 k 的数量。

3) 互斥项目

投资项目称为是互斥的，如果接受了其中之一就不能接受另一项了，如汽车公司要选择一个自动安全装置，如果采用了

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

空气包就不能再采用自动安全带了。假设集合 G 是一类互斥项目的集合，则应在问题(2.7)中增加约束

$$\sum_{i\in G} x_i \leq 1，且 x_i=0 或 1，i\in G \tag{2.9}$$

同时在(2.7)中删除多余约束 $0\leq x_i\leq 1$，$i\in G$ 。

此时问题变为整数规划或混合整数规划问题，我们将在本章后面介绍。

4) 伴随项目

一组项目称为是伴随的，如果一个项目的采用取决于其他项目的采用。若只有当 k 项目被接受时才能接受 i 项目，则应增加约束

$$x_i\leq x_k，且 x_i，x_k 为 0 或 1 \tag{2.10}$$

并可从问题(2.7)中去掉多余约束 $x_i\leq 1$。

(2) 只允许贷出的资本预算

上面我们假设一年中未用完的钱不能转入下一年使用。这会造成提前花费，故在很多情形下，经营者会允许将本年未用完的资金转入下一年使用。也就是说可将未动用的资金贷出或存入银行将本利和转入下一年(这里考虑不贷出或不存银行则利息为零的情形)。如果不考虑利息，这样 LP 模型(2.7)的约束方程可修改为

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{M} f_{i1}x_i + s_1 = b_1, \\
&-\sum_{i=1}^{M} f_{it}x_i + s_t = b_t, \qquad t=2，3，\cdots，N \\
&s_t \geq 0 \qquad\qquad t=1，2，\cdots，N \\
&0\leq x_i\leq 1 \qquad\quad i=1，2，\cdots，N
\end{aligned} \tag{2.11}$$

约束(2.11)表示了两期资金的组合转换，并保证本期不能挪用下期资金。新的 LP 问题增加了变量 s_1，s_2，…，s_N，其中 s_t

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为 t 年的未用完资金。

(3) 只允许借入的资本预算

允许从外部按一定利率借入资金的 LP 模型是既允许借入又允许贷出的 LP 模型的特例，只需从其中消去贷出部分即可。

(4) 同时允许借入、贷出的资本预算

此时允许按利率，将本年度末用完的留存资金量带入下一年，也允许以市场利率借入资金。

设公司对某项目投资年限为 N 年(第 N 年称为基准年)。在 N 年内借入和贷出资金的利率均为 r。投资目标是使 N 年末的总现金流量最大。令 α_t、β_t 分别表示 t 年借入和贷出的资金量。f_{it} 为 t 年中从第 i 个投资项目可得到的现金流量，模型中所有现金流均为当时的现金价值。收入和支出分别用正和负的现金流量表示。一个好的项目在 N 年后能产生正现金流，设 $\hat{f}_i$ 是由第 i 个项目 N 年后总现金流量在基准年的总现值，那么资本预算的 LP 模型为

$$\max \quad \sum_{i=1}^{M} \hat{f}_i x_i + \alpha_N - \beta_N$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{i=1}^{M} f_{i1} x_i + \alpha_1 - \beta_1 \leqslant b_1$$

$$-\sum_{i=1}^{M} f_{it} x_i - (1+r)\alpha_{t-1} + \alpha_t + (1+r)\beta_{t-1} \leqslant b_t, \quad t=2, 3, \cdots, N \tag{2.12}$$

$$\alpha_t \leqslant c_t, \quad t=1, 2, \cdots, N$$

$$\alpha_t, \quad \beta_t \geqslant 0 \quad t=1, 2, \cdots, N$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad i=1, 2, \cdots, M$$

其中 b_t 为第 t 年的预算；c_t 为 t 年内借入资金的限额(即公司的债务)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

上述模型同样可增加稀缺资源约束以及互斥项目和件随项目约束。还可考虑按不同利率借入的模型。

由上述各个 LP 模型得到的最优解中可能包含投资某个项目的一部分，因而它只是近似解。要得到正确解则要用整数规划方法，但整数规划程序其效率远低于 LP 程序，因而一般仍用 LP 程序解之，然后把解调整到可行的整数解，但可能用这种方法很难找到一个可行的整数解，或得到的解与最优解相差甚远。

对于互斥项目的非整数解，可能用它们的非整数混合表示会更好些。非整数项目还显示了合营的可能性。例如对某个购物中心投资 1 / 3 较好，若能找到能投资 2 / 3 的合作伙伴，那么这种投资方式是可以被接受的。

2.3　对偶线性规划与资本预算

每一个线性规划问题 LP 都有一个称之为对偶线性规划问题(D)与之对应。当 LP 问题有最优解时，它对应的(D)问题也有最优解。原 LP 问题我们称之为原始线性规划问题，记为(P)。通过对偶问题的研究有助于我们对原始问题的了解和分析。

2.3.1　对偶问题的形式与性质

首先写出原始问题，其形式应满足以下条件：

(1) 对极大化问题所有不等式约束均为小于等于形式；对极小化问题所有不等式约束均应为大于等于形式。

(2) 所有变量均为非负(≥0)的或者是无符号约束的(≥≤)。

然后按下述步骤将原始问题化为对偶问题：

(1) 若原始问题为极大化(极小化)问题，则其对偶问题应为极小化(极大化)问题。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(2) 原始问题中的每个约束相应于对偶问题中的一个变量。对极大化(极小化)问题中的每个≥(≤)约束，相应对偶问题中的变量是非负的，原始问题中的每个等式约束均相应于一个无符号限制变量。

(3) 原始问题中，目标函数的系数是对偶问题的约束方程的右端项；而原始问题约束方程的右端项是对偶问题目标函数的系数。

(4) 原始问题的每个变量对应于对偶问题的一个约束方程。当原始问题中某一个变量是非负的，那么当对偶问题为极大化(极小化)时，它对应一个≥(≤)约束方程。当原始问题中某个变量无符号限制时，它对应对偶问题的一个等式约束。

(5) 原始问题各约束方程中同一个(第 j 个)变量的系数是对偶问题第 j 个约束方程的系数。

例 1　写出下列 LP 问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z = 5x_1 - 3x_2 + 10x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8 \\
(P)\quad & 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leqslant 10 \\
& -3x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leqslant -3 \\
& x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \gtreqless 0
\end{aligned}
$$

解：对偶变量有 3 个：$y_1 \gtreqless 0$，$y_2 \geqslant 0$，$y_3 \geqslant 0$。对偶问题应为：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & G = 8y_1 + 10y_2 - 3y_3 \\
\text{s.t.}\quad & y_1 + 2y_2 - 3y_3 \geqslant 5 \\
(D)\quad & 2y_1 - 6y_2 + 12y_3 \geqslant -3 \\
& 7y_1 + 5y_2 + 8y_3 = 10 \\
& y_1 \gtreqless 0,\ y_2 \geqslant 0,\ y_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

上面对偶问题还可以用上一节的方法化为标准形式。这样一般原始问题与对偶问题可表示为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$
(P)\quad
\begin{aligned}
&\max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\
&x_j \geqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n
\end{aligned}
\qquad (2.13)
$$

$$
(D)\quad
\begin{aligned}
&\min \quad G=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
&\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geqslant c_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \\
&y_j \geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m
\end{aligned}
\qquad (2.14)
$$

对偶问题(2.14)仍是一个线性规划问题，还可以写出它的对偶规划，不难验证，对偶的对偶即为原始问题。原始与对偶的关系表示在表 2.1 中。

表 2.1　原始与对偶问题关系

对偶问题约束左端系数 ＼ 原始问题约束左端系数							原始问题约束右端	对偶变量
	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	a_{1j+1}	$\cdots$	a_{1n}	$\leqslant b_1$	$y_1 \geqslant 0$
	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	a_{2j+1}	$\cdots$	a_{2n}	$\leqslant b_2$	$y_2 \geqslant 0$
	$\vdots$							$\vdots$	$\vdots$
	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}	a_{ij+1}	$\cdots$	a_{in}	$\leqslant b_i$	$y_i \geqslant 0$
	a_{i+11}	a_{i+12}		a_{i+1j}	a_{i+1j+1}	$\cdots$	a_{i+1n}	$=b_{i+1}$	$y_{i+1} \geqslant\leqslant 0$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}	a_{mj+1}	$\cdots$	a_{mn}	$=b_m$	$y_m \geqslant\leqslant 0$
	$\geqslant$	$\geqslant$		$\geqslant$	$=$	$\cdots$	$=$		
对偶问题	c_1	c_2	$\cdots$	c_j	c_{j+1}		c_n		$\min \sum_{i=1}^{n} b_i y_i$
	$x_1 \geqslant 0$	$x_2 \leqslant 0$	$\cdots$	$x_j \geqslant 0$	$c_{j+1} \geqslant\leqslant 0$	$\cdots$	$x_n \geqslant\leqslant 0$	原始目标 $\max \sum_{i=1}^{n} c_j x_j$	

关于原始与对偶问题有下述几个重要结论：

(1) 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)'$ 及 $y=(y_1,\cdots,y_m)'$ 分别为(P)问题(2.13)

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

及(D)问题(2.14)的可行解，那么它们对应的目标函数值有关系

$$G=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i \geqslant Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j 。$$

(2) 若 $X^*=(x^*_1, \cdots, x^*_n)^T$ 及 $Y^*=(y^*_1, \cdots, y^*_m)^T$ 分别为原始(P)问题(2.13)及对偶(D)问题(2.14)的可行解，并且 $G^*=\sum_{i=1}^{m}b_iy^*_i=Z^*=\sum_{j=1}^{n}c_jx^*_j$，那么 X^*，Y^*分别为(P)及(D)的最优解。

(3) 若(P)及(D)中有一个有最优解，则另一个也有最优解，且它们的最优值相同，即 $Z^*=G^*$。

(4) 当(P)及(D)均有可行解时，它们都有最优解。

由这些性质易知，(P)的最优值可以通过(D)的最优值获得。关于这些性质的进一步阐述与证明可参阅有关线性规划书籍。

2.3.2 对偶变量的经济学解释

我们再来看本章第 2.1 节中的投资实例

$$(P)\quad \begin{aligned} \max\quad & Z=6x_1+3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+3x_2\leqslant 12 \\ & 4x_1+x_2\leqslant 8 \\ & x_1\geqslant 0，x_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} \min\quad & G=12y_1+8y_2 \\ \text{s.t.}\quad & 2y_1+4y_2\geqslant 6 \\ & 3y_1+y_2\geqslant 3 \\ & y_1\geqslant 0，y_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

(D)问题的最优解为 $y^*_1=0.6$，$y^*_2=1.2$，$G^*=16.8$。在此问题中

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

当第一年资金由 12 增至 13 时相应有收益 $Z^{**}=G^{**}=(12+1)y^*_1+8y^*_2=G^*+y^*_1$。故 y^*_1 可看成是资源 1(即第一年资金)的边际价值(只考虑不影响最优解的小变动)，同样地，y^*_2 是资源 2(即第二年资金)的边际价值，我们把它们称为资源的影子价格(或称为资源的机会成本)。

我们还可以从另一角度理解影子价格的含义。在上例中假设公司不进行投资而直接卖出其资源(即资本)，那么在保证收入不低于原来对每个项目的直接收入情形下，应如何对其资源定价，使对买主具有最大吸引力(即卖价尽量地低)，假设 y_1、y_2 分别为第一年资金和第二年资金的价格，那么列出的相应的规划问题就是上述(D)问题。必须指出所谓的影子价格与市场价格不同，它是公司内部对资源贡献的估价。当某项资源没有充分利用时[例如(P)中约束具有非零松弛变量]那么其影子价格为零，即再增加一个单位该资源对收益毫无影响。

2.3.3 净资本限额下考虑贴现因子的基本模型

现在我们再来讨论净资本限额下的基本模型式(2.7)：

$$\max \quad Z=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{i=1}^{m} f_{it} x_i \leqslant b_i \qquad t=1, 2, \cdots, N \qquad (2.15)$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad i=1, 2, \cdots, M$$

其中，P_i 为第 i 个项目的净现值(由未来的现金流预测得到)；f_{it} 为第 i 个项目在 t 年的预计现金流(流入为正，流出为负)；b_i 为 t 年可用的预算；M 为可供选择的项目数；x_i 为投资第 i 项目的份额。

这里假设该公司不能从外部市场借入或贷出资金。由于要

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

考虑时间因素，故在资本预算中要引入贴现因子。t 年的贴现因子 d_t 定义为

$$d_t=(1+r_t)^{-t} \tag{2.16}$$

这里 r_t 是 t 年的利率(r_t 有可能在整个时间过程中均相同，也可能不同)，那么项目 i 的净现值为

$$p_i=\sum_{i=1}^{n} f_{it}d_t \tag{2.17}$$

代入基本模型(2.15)得到问题(P)

$$\max \quad Z=\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{N} f_{it}d_t x_i$$

$$(P)\ \text{s.t} \quad -\sum_{i=1}^{m} f_{it}x_i \leqslant b_i \quad t=1,2,\cdots,N \tag{2.18}$$

$$0\leqslant x_i\leqslant 1 \quad i=1,2,\cdots,M$$

这里 Z 是各项目净现值之总和。令 y_t 是与式(2.18)中第 t 年预算约束有关的对偶变量，g_i 为与 $x_i\leqslant 1$ 有关的对偶变量，那么(P)的对偶问题为

$$\min \quad G=\sum_{t=1}^{N} b_t y_t+\sum_{i=1}^{M} g_i$$

$$(D)\ \text{s.t} \ -\sum_{t=1}^{N} f_{it}y_t+g_i \geqslant \sum_{t=1}^{N} f_{it}d_t \quad i=1,2,\cdots,M \tag{2.19}$$

$$y_t,\ g_i\geqslant 0 \qquad \forall t,\ i$$

式(2.19)的最优解设为 y^*_t，g^*_i，$t=1,\cdots,N$，$i=1,\cdots,M$。同前面的解释一样，y^*_t 表示了 t 年增加单位预算时各项总净现

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

值的增量。假定 t 年预算的增量为 v 个单位，那么净现值的增量应为 vy^*_t。同时 v 的净现值应为 vd_t。由此可知 $d_t=y^*_1$，当问题(P)的最优解具有性质 $d_t=y^*_t$，$t=1$，…，N 时，我们称它是相容的。要解出式(2.18)的最优解，必须先确定贴现因子，但贴现因子难以直接确定，用通常的迭代法的收敛性与收敛速度均难以估计与保证。

例 2 设某技术机构考虑对六个独立项目在资本限额下进行投资。本年投资不能带入下一年，投资期为 3 年，各项目的净现值及支出如表 2.2 所列，我们规定净现值与支出可按比例对投资项目的份额进行分配，例如项目 1 的净现值为 15，那么 $\frac{1}{3}$ 项目 1 的净现值为 5，现要进行投资组合决策，该问题的线性规划模型为

表 2.2 各投资项目资本预算

项目		1	2	3	4	5	6	总可用资本
净现值		15	7	12	20	4	10	
预期各年支出	第一年	7	9	2	12	3	5	35
	第二年	4	2	4	8	3	—	20
	第三年	2	3	5	1	10	4	21

$$
\begin{aligned}
\max\quad & NPV=15x_1+7x_2+12x_3+20x_4+4x_5+10x_6 \\
\text{s.t.}\quad & 7x_1+9x_2+2x_3+12x_4+3x_5+5x_6\leqslant 35 \\
(P)\quad & 4x_1+2x_2+4x_3+8x_4+3x_5\leqslant 20 \\
& 2x_1+3x_2+5x_3+x_4+10x_5+4x_6\leqslant 21 \\
& 0\leqslant x_i\leqslant 1\qquad i=1,2,\cdots,6
\end{aligned}
$$

用 LP 程序解得最优解 $X^*=(1, 0.7778, 1, 1, 0.6667, 1)^T$ 松弛变量 $S^*=(s^*_1, s^*_2, s^*_3)^T=(0, 0.4444, 0)^T$，最优值 $Z^*=65.1110$，这表示只有第二年的资金没有用完。

相应的对偶问题为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\min \quad G=35y_1+20y_2+21y_3+\sum_{i=1}^{6}g_i$$

$$\text{s.t.} \quad 7y_1+4y_2+2y_3+g_1\geqslant 15$$

$$(D) \quad 9y_1+2y_2+3y_3+g_2\geqslant 7$$

$$2y_1+4y_2+5y_3+g_3\geqslant 12$$

$$12y_1+8y_2+y_3+g_4\geqslant 20$$

$$3y_1+3y_2+10y_3+g_5\geqslant 4$$

$$5y_1+4y_3+g_6\geqslant 10$$

$$y_i\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ 3$$

解得最优解为 $Y^*=(0.716,\ 0,\ 0.185\ 2)^T$，这告诉经营者若在 3 年中增加预算要使产生的净现值最大就应在第一年中增加，在第二年中增加的预算对净现值不起任何作用，我们还可得到 $g^*=(g^*_1,\ g^*_2,\ g^*_3,\ g^*_4,\ g^*_5,\ g^*_6)^T=(9.617\ 3,\ 0,\ 9.642\ 0,\ 11.222\ 2,\ 0,\ 5.679\ 0)^T$。

它与 X^*之间具有下述关系：

若 $0<x^*_i<1$ 则 $g^*_i=0$；

若 $x^*_i=1$ 则 $g^*_i\geqslant 0$；

若 $x^*_i=0$ 则 $g^*_i=0$。

2.3.4 基准点模型

所谓资本预算的基准点模型是指按未来某一时刻作为计算净现值的基准点，用这种模型可避免去求真正的贴现因子。下面我们只考虑允许贷出的资本预算，其他情形的模型类似。

允许贷出时的资本预算模型如下。

假设某公司可以向外借出未用完资金，其利率为 r，第 N 年末作为基准点，此后不允许资金流出(入)。第 N 年末的资金及利息作为公司收益，a_t 表示阶段 t 的未用完资金，那么资本

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

预算模型为

$$\max \quad \alpha_N$$

$$\text{s.t} \quad -\sum_{i=1}^{M} f_{i1}x_i+\alpha_1=b_1$$

$$-\sum_{i=1}^{M} f_{i1}x_i+\alpha_1-(1+r)\alpha_{t-1}=b_t \quad t=2,3,\cdots,N \qquad (2.20)$$

$$0\leqslant x_i\leqslant 1 \quad \alpha_t\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,M \quad t=1,2,\cdots,N$$

式中全体符号意义同式(2.12)。这里目标函数为期末剩留资金。其结果与按利率 r 作为贴现因于的极大化净现值

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{N} f_{it}(1+r)^{-t}x_i$$

的模型一致。线性规划问题(2.20)的对偶问题为

$$\max \quad \sum_{t=1}^{N} b_t y_t+\sum_{i=1}^{M} g_i$$

$$\text{s.t} \quad -\sum_{t=1}^{N} f_{it}y_t+g_i\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,M$$

$$(D) \quad y_t-(1+r)y_{t+1}\geqslant 0 \quad t=1,2,\cdots,N-1 \qquad (2.21)$$

$$y_N\geqslant 1$$

$$g_i\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,M$$

由对偶的松紧定理可得：

(1) 若原始问题最优解中 $a_t=0$，那么对偶最优解有 $y^*_t\geqslant(1+r)y^*_{t+1}$，设 $y^*_{t+1}\neq 0$，$t=1,2,\ldots,N-1$，那么 $\dfrac{y^*_t}{y^*_{t+1}}\geqslant(1+r)$，$y^*_N\geqslant 1$，这表示 y^*_t 按不低于 $(1+r)$ 的速度增加。即投资边际价值不低于贷出的收益。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(2) 若原始问题最优解中 $a_t>0$ $t=1, 2, \cdots, N$，那么 $\dfrac{y_t^*}{y_{t+1}^*}=1+r$，且 $y^*_N=1$。这表明，资本在任一时期中均未完全使用，并有

$$y^*_t=(1+r)^{N-t} \tag{2.22}$$

这种投资状态不够合理。投资的边际价值相当于贷出的收益。

(3) 若对某些 t，a_t 为正；对某些 t，$a_t=0$，那么有

$$\frac{y_t^*}{y_{t+1}^*}\geqslant(1+r)\text{当 } a_t=0,$$

而 $$\frac{y_t^*}{y_{t+1}^*}=(1+r),\ \text{当 } a_t>0$$

例 3 设某公司有 6 个项目可供选择进行投资，基准点为第 3 年末，年末未用完资金允许贷出，贷出利率为 10%，不允许借入，不记期外流入。投资数据如表 2.3 所列。

表 2.3 各项目的资本预算基准年：第 3 年末 （单位 1 000 元）

项目 i		1	2	3	4	5	6	情形 1 年资本预算	情形 2 年资本预算
现金流量(单位份额)	第一年	-7	-9	-2	-12	-3	-5	40	15
	第二年	-3	-2	-3	-6	-5	0	15	15
	第三年	18	17	8	25	13	9	21	21
期外流入现金(已按 $r=10\%$折算成基准年现金) $\hat{f}_i$		12	5	10	20	16	0		

考虑表中情形 1 的年资本预算问题的基准点模型为

$$\max \quad a_3$$

$$\text{s.t.} \quad 7x_1+9x_2+2x_3+12x_4+3x_5+5x_6+a_1=40$$

$$3x_1+2x_2+3x_3+6x_4+5x_5-1.1a_1+a_2=15$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$-18x_1-17x_2-8x_3-25x_4-13x_5-9x_6-1.1a_2+a_3=21$$

$$0\leqslant x_i\leqslant 1 \qquad i=1，2，\cdots，6$$

$$a_t\geqslant 0 \qquad t=1，2，3$$

得到最优解：$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=1$，$x_4=0.906\ 2$(即部分投资于该项目)，$a^*_1=3.125$，$a^*_2=0$，$a^*_3=108.656\ 2$，即该公司在第 3 年末应有收益 108.656 2,相应的对偶问题最优解为 $y^*_1=1.433$,$y^*_2=1.302\ 1$,$y^*_3=1$,这说明若各年增加 1 个单位(即 1 000 元)的投资，那么在基准点的收益将分别增加 1.432 3，1.302 1 以及 1.0(即增长率为 0)。我们还可得到以下结论：

(1) $a^*_2=0$ 故 $\dfrac{y_2^*}{y_3^*}=\dfrac{1.3021}{1}>1.1=1+r$ 这说明第二年投资收益增长率超过贷出收益增长率。

(2) $a^*_1=3.125\ 0>0$，故 $\dfrac{y_1^*}{y_2^*}=\dfrac{1.4323}{1.3021}=1.1$，即第一年剩余资金贷出收益增长率与投资收益增长率相等。

(3) $a^*_3=108.656\ 2>0$。$y^*_3=1$，这说明基准年后投资收益增长率为 0。

2.4 投资预算的整数规划 IP 模型

上面用线性规划确定投资预算时，包括了非整数解，即可以对某个项目作部分投资，但很多问题不允许部分投资，此时的线性规划称为整数规划。

解整数规划最简单方法是用线性规划方法求解，然后用四舍五入方法得到整数解，但这样做可能会引进两个问题：①得到的近似整数解可能是不可行的；②得到的解可能不是原整数

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

规划问题的最优解。

为此提出了一些专门解整数规划的方法。其中应用最广泛的是分支定界法，本节将通过一个例子说明分支定界法的原理。

对于线性规划，如果所有变量均限制为整数则称为纯整数规划。如果允许其中某些变量可取非整数则称为混合整数规划。在有些情形下，变量只能取 0 或 1，这种整数规划称为 0～1 规划。

分支定界方法是寻找整数(或混合整数)规划的一种方法，它通过不断地搜索缩小可行域的范围，最后获得整数最优解。

例 1 考虑表 2.3 上情形 2 的投资问题，允许借入贷出以及期外现金流入，其模型为

$$
\begin{aligned}
\max\quad & Z=12x_1+5x_2+10x_3+20x_4+16x_5+\alpha_3-\beta_3\\
\text{s.t.}\quad & 7x_1+9x_2+2x_3+12x_4+3x_5+5x_6+\alpha_1-\beta_1\leqslant 15\\
& 3x_1+2x_2+3x_3+6x_4+5x_5-1.1\alpha_1+\alpha_2+1.1\beta_1-\beta_2\leqslant 15 \qquad (2.23)\\
& -18x_1-17x_2-8x_3-25x_4-13x_5-9x_6-1.1\alpha_2+\alpha_3\\
& +1.1\beta_2-\beta_3\leqslant 21\\
& \beta_1\leqslant 10,\ \beta_2\leqslant 7,\ \beta_3\leqslant 1,\ \alpha_t,\ \beta_t\geqslant 0,\ t=1,\ 2,\ 3\\
& x_i=1 \text{ 当对第 } i \text{ 个项目投资时；}\\
& 0，\text{当对第 } i \text{ 个项目不投资时。}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6
\end{aligned}
$$

其中 α_t、$\beta_t(t=1, 2, 3)$分别为 t 年贷出及借入资金，借贷利率均为 10%。图 2.2 给出了分支定界法的搜索过程。首先(记为1)用线性规划方法解题，此时用 $0\leqslant x_i\leqslant 1(i=1, 2, \cdots, 6)$约束代替问题中的整数约束。如果得到的最优解中无分数投资项目，则此解即为 IP 最优解。这里 1 中由于 $x_4=0.74$ 是非整数，故 LP 解不是原问题解。此时分支需解两个 LP 问题 2、3，对问题 2 在问题 1 基础上增加约束 $x_4=1$，类似地问题 3 增加约束为 $x_4=0$，然后解问题 2、3。显然它们的最优解或者下降了或者不变。由于问题 2 的目标函数值大于问题 3，故在问题 2 基

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

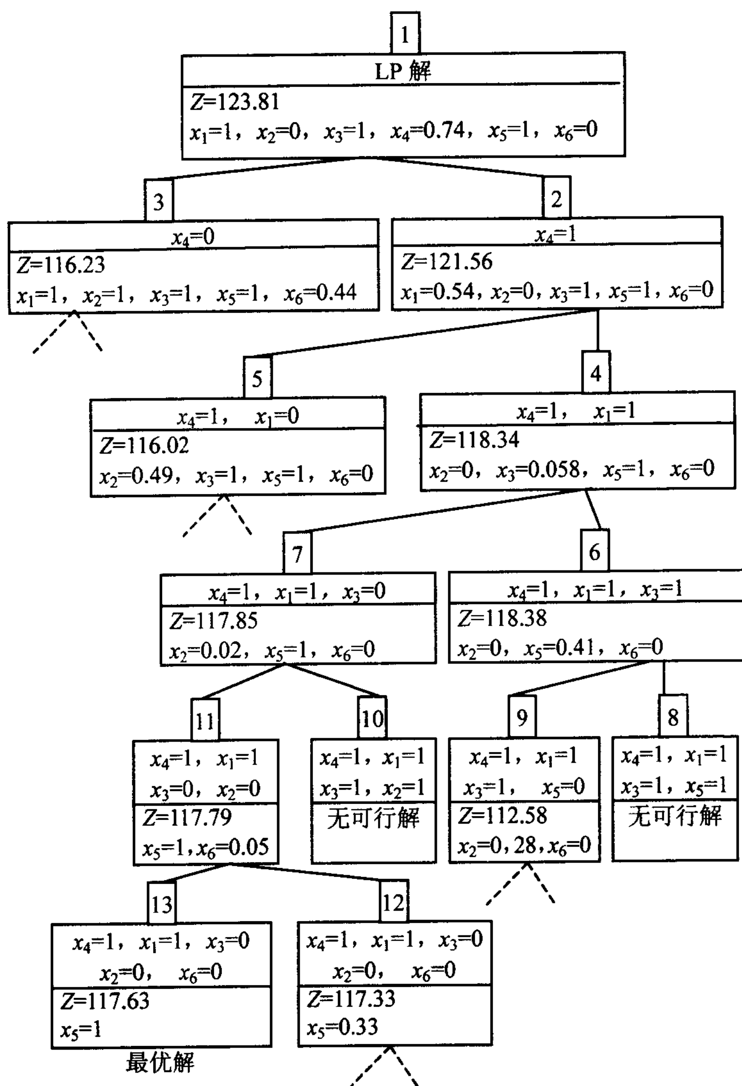


图 2.2　分支定界法

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

础上作进一步调整。在问题 2 上作新的分支 4，5。其中 4 增加新约束 $x_1=1$，5 增加新约束 $x_1=0$，解问题 4，5，仍未找到整数解。由于问题 4 的最优解大于 5，故以 4 为基础作分支 6、7，增加的约束分别为 $x_3=1$、$x_3=0$。同理下一步以 6 基点得到分支 8、9，而增加了约束 $x_5=1$ 的问题 8 无可行解，故该支应截去，而 9 的最优解小于问题 7 的最优值，故 7 被选为下一步分支的基点。这样下去，到问题 13 时，得到整数解，并且其目标函数值大于问题 3，故问题 13 的解就是最优解。

2.5 参数规划，随机规划

2.5.1 灵敏度分析和参数规划

在上面各节讨论的线性规划、整数规划模型中，模型的参数包括基准年、现金流量、年资本预算以及借贷的利率等都假设为确定的，但实际上这些值都与未来情况有关，某些参数又与政策有关，它们会随国家的宏观经济政策、市场规律及国际经济形势等因素而变化，因而不是完全确定的，研究模型中各种参数的一次性变化(甚至有限次变化)对最优解的影响称为灵敏度分析，应用灵敏度分析方法，当参数变化时无需从头开始重新计算，因而使模型更为有效。

灵敏度分析又称为优化后分析法，它研究模型中各种参数变化对已有结果的影响。根据投资模型中参数的特点，可对以下问题进行讨论。

(1) 改变目标函数的系数，如资本预算基本模型(2.7)下的第 i 个项目的净现值 P_i，和在模型(2.12)中的总借入、贷出的资金量 α_N、β_N;

(2) 改变模型右边的常数项系数，如资本预算基本模型(2.7)下 t 年可用的预算值 b_t;

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(3) 改变模型左边约束条件的系数，如资本预算基本模型(2.7)下第 t 年从第 i 个项目可得到的现金流量 f_{it};

(4) 增加新的投资项目，意味着增加新的变量;

(5) 增加新的投资约束等。

关于最优解对参数变化的灵敏度分析，一般线性规划书籍中都有相应解法，通用线性规划软件也都有这种基本功能。最常遇到的两种问题是目标函数系数和常数项的变化范围。前者是指当最优解相应的基底不变，而目标函数的系数许可变化的范围，也就是说能够使最优解中的决策变量值保持不变的情况下，目标函数系数的变化范围。后者是指在不改变与最优解相应的基底的情况下，右端常数项能够变化的范围。同时，这两种变化对最优解的影响也可得到。特别强调当与最优解有相同的基底时，会使改变后的问题比较容易解决。

我们仍来分析模型(2.23)的投资问题(单位 1 000 元):

$$\max \quad Z=12x_1+5x_2+10x_3+20x_4+16x_5+\alpha_3-\beta_3$$

$$\text{s.t.} \quad 7x_1+9x_2+2x_3+12x_4+3x_5+5x_6+\alpha_1-\beta_1\leqslant 15$$

$$3x_1+2x_2+3x_3+6x_4+5x_5-1.1\alpha_1+\alpha_2+1.1\beta_1-\beta_2\leqslant 15$$

$$-18x_1-17x_2-8x_3-25x_4-13x_5-9x_6-1.1_2$$

$$+\alpha_3+1.1\beta_2-\beta_3\leqslant 21$$

$$0\leqslant x_i\leqslant 1 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$$

$$\beta_1\leqslant 10,\ \beta_2\leqslant 7,\ \beta_3\leqslant 1,\ \alpha_t,\ \beta_t\geqslant 0,\ t=1,\ 2,\ 3$$

其最优解为 $Z^*=123.810$， $x^*_2=0$，$x^*_3=1$，$x^*_4=0.74$，$x^*_5=0$，$\alpha^*_1=0$，$\alpha^*_2=0$，$\alpha^*_3=70.920$，$\beta^*_1=5.940$，$\beta^*_2=7.000$，$\beta^*_3=0$。

我们要研究下述几个问题:

(1) 利率及 α_N、β_N 的变化对最优值 Z^* 的影响。表 2.4 列出了利率变化对 Z^* 的影响。

(2) 基准期外流入的现金对最优值 Z^* 的影响。表 2.5 列出 $\hat{f}_1$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 2.4 目标函数最优值与借入利率的关系 （单位：1 000 元）

借入(出)利率 r	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%
目标函数最优值 Z^*	124.880	124.660	124.450	124.240	124.020	123.810	123.610	123.400	123.190	122.990

表 2.5 项目 $\hat{f}_1$ 期外流入资金变化对最优解与最优值的影响 （单位 1 000 元）

$\hat{f}_1$	12	11	10	9	8	7.08	7	6	5	4	3	2	1	0
Z^*	123.81	122.81	121.81	120.81	119.81	118.90	118.85	118.31	117.77	117.23	116.68	116.14	116.02	116.02
x_1^*	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.00	0.00
x_2^*	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.49	0.49
x_3^*	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00
x_4^*	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00
x_5^*	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00
x_6^*	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

变化对 Z^* 的影响。

(3) 研究对投资计划没有影响的目标函数系数变化范围以及约束方程右端值的变化范围。表 2.6、表 2.7 列出了两者的许可变化范围(以上计算均用 LINDO 软件完成)。由表 2.6 可看出，项目 1 在第 3 年后的现金流量在 12 基础上无论增加多少均不会影响原有投资计划，当然最优值是要改变的。当现金流量的减少低于 4.920 时也不会改变原投资计划。当 $\hat{f}_1$ 继续减少到低于 7.080 时投资计划就会改变了。

不影响最优投资计划的参数允许变化范围越小，则参数的灵敏度越高。

当参数连续变化时，譬如产品价格持续上涨，或利率水平呈一定规律变化，这时用灵敏度方法处理就不很方便。参数变化规律导致最优解变化也有一定规律可循，这类问题称为含参数的线性规划问题。从计算角度看，灵敏度分析仅限于不改变最优基的条件下的参数变化，但当参数变化超过某个范围时，进入基的变量和离开基的变量都会由于参数变化而游动，我们把处理这种问题的规划称为参数规划。参数规划可简单地分为两类：目标函数含参数的线性规划和右端常数项含参数的线性规划。研究参数规划的可解性及最优解的表达式(解对参数的依赖性)，与下面提到的随机规划中的分布问题有密切关系，可作为随目标值 $Z(\omega)$ 可测性的准备知识。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 2.6 不影响最优投资决策的目标函数系数允许变化范围

(单位：1 000 元)

目标函数系数许可范围			
变量	现有系数	允许增加值	允许减少值
x_1	12.00	无限制	4.92
x_2	5.00	5.89	无限制
x_3	10.00	无限制	5.81
x_4	20.00	8.83	9.50
x_5	16.00	无限制	9.55
x_6	0.00	3.89	无限制
α_1	0.00	0.00	无限制
α_2	0.00	1.24	无限制
α_3	1.00	0.00	1.00
β_1	0.00	0.00	1.99
β_2	0.00	无限制	1.24
β_3	−1.00	0.00	无限制

表 2.7 不影响最优投资决策的右端系数允许变化范围(单位：1 000 元)

右端系数许可范围				
约束		现有系数	允许增加值	允许减少值
可利用投资量	第 1 年	15.00	4.45	13.00
	第 2 年	15.00	4.90	9.50
	第 3 年	21.00	Infinity	70.92
借入限制	第 1 年	10.00	Infinity	4.06
	第 2 年	7.00	4.90	7.00
	第 3 年	1.00	Infinity	1.00

当目标函数含参数时，我们称为 PCP。这里只研究一般的线性参数规划模型：

$$\min \quad Z(\lambda, c)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j'' x_j$$

$$\text{(PCP)} \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,2,\cdots,m \qquad (2.24)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

用矩阵表示为：

$$\text{(PCP)} \quad \begin{aligned} \min \quad & Z=(C'+\lambda C'')^T X \\ \text{s.t.} \quad & AX=b \\ & X \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

该参数规划的几何意义是明确的，$Z=(C'+\lambda C'')^T X$ 表示一簇超平面，考虑法向量 $C=C'+\lambda C''$ 当 $\lambda=0$ 时，$C=C'$；当 $\lambda\to+\infty$ 时，C 趋向于与 C'' 的方向一致。当 $\lambda\to-\infty$ 时，C 趋向于与 C'' 的方向相反，故当从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，C 的方向正好转动了 180°。因此，求解参数规划(PCP)时，可先取定一个 λ 值，如取定 $\lambda=0$，求解对应的 PCP，再求出使该解保持为最优解的 λ 区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$，然后对 $\lambda>\lambda_2$、$\lambda<\lambda_1$ 求解。这样，对 $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ 都找到了最优解时，也就求解了 PCP。

同理，我们可以研究右端常数项含参数的线性规划模型(PRP)：

$$\text{(PCP)} \quad \begin{aligned} \min \quad & Z=C^T X \\ \text{s.t.} \quad & AX=b'+\lambda c' \\ & X \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

显然，它的对偶问题是 PCP 问题，因而不再赘述。

2.5.2 随机约束规划

更为一般的结果是参数的变化为随机的，如投资模型中的所有投资预算、包括投资项目的现金流量、借贷利率、年可用投资以及基准年外流入现金，借贷量以及借入限额等均可能是具有某种特征的随机变量，此时的资本预算问题就可用随机规划模型来解决。

随机规划问题的一般形式是：

$$\min \quad Ef[x,\zeta(\omega)]$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$(PCP)\qquad s.t.\quad Eg_i[x,\zeta(\omega)]\leqslant 0\qquad i=1,2,\cdots,m\qquad (2.27)$$
$$x\in X$$

这里，$x\in X$ 是确定性的约束条件，与 $\zeta(\omega)$ 无关。

在实际问题中经常采用的处理规划模型中的随机变量的方法有两种。一种是等待观察到随机变量实现以后再解出相应的规划问题(作出决策)；另一种是在观察到随机变量的实现以前便作出决策，如果等到随机变量实现后，作出的决策不可行，再修正可行解。这两种处理方法导致不同的随机规划模型。

(1)等待观察到随机变量实现以后再作决策(分布问题)。这时，系数完全确定，从而得到相应的确定性规划问题，最优解和最优值随观察值而变动，这不仅是个确定性规划问题，而且要知道所有这些最优值的概率分布。

$$\min\quad z(\omega)=\min f(x,\zeta(\omega))$$
$$s.t.\quad x\in \Gamma(\zeta(\omega))$$
$$x\in X\subset R^n$$

其中，ζ 为随机变量；Γ 为点到集合的映射；X 为与随机变量 ζ 无关的一个集合。要求 $Z(\omega)$ 的概率分布、分布函数以及与分布有关联的数字特征、方差、期望等。分布问题与参数规划有很多相似之处。前者更为重视最优值的分布问题，即着重于对取某些值的可能性大小的研究。

(2)在观察到随机变量的实现以前便作出决策。其中比较成熟的有概率约束规划问题，其一般模型为

$$\min\quad f(x)$$
$$s.t.\quad P\{g_i(x,\zeta(\omega))\geqslant 0\}\geqslant a_i\qquad i=1,2,\cdots,m\qquad (2.28)$$
$$x\in X$$

其中，指定数 a_i, $i=1,2,\cdots,m$ 满足 $0\leqslant a_i\leqslant 1$。与此相应的线性概

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

率约束规划模型为

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leqslant b_i\right) \geqslant P_i \qquad i=1,2,\cdots,m; \tag{2.29}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

这时约束方程矩阵系数为随机变量，约束方程用概率约束表示。

(3)考虑数字特征下随机变量处理方法。如要求目标函数的概率平均值达到最大值的规划问题

$$\max \quad E\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m; \tag{2.30}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

这类问题称为 E—型。类似还有研究使目标函数方差达到最小的 V—模型

$$\max \quad \sigma\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m; \tag{2.31}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

这里 c_j 为随机变量 $c_j(\omega)$，$j=1,2,\cdots,n$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(4)当要求目标函数值不小于某一指定值的概率达到最大值时，其模型为

$$\max \quad P\{[\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j] \geqslant u_0\}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m; \tag{2.32}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

这个问题称为 P—模型。可将其转化为概率约束规划问题：

$$\max \quad u$$

$$p\{[\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j] \leqslant u_0\} \leqslant \alpha$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m; \tag{2.33}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

由于在经济活动中通常都具有风险性，因此任何使亏损的风险最小或在一定的风险下使获利最大的问题都可有选择地应用上述模型。实际问题究竟应采用何种模型应由实际问题的本身特点及决策者的原则决定。各种模型之间存在一定关系，并可相互转化。这里我们仅对线性概率约束规划的解法及其实际意义作一些初步介绍。在考虑资本预算的 LP 模型

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m;$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

中当输入量 a_{ij}，c_j，b_i 为随机变量时，约束方程有可能不是对所有 a_{ij} 及 b_i 值均能成立。此时我们用约束方程

$$p(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_i) \geqslant P_i \qquad i=1,2,\cdots,m; \tag{2.34}$$

来代替原有约束。这里 P 是概率符号，P_1，…，P_m 是给定的概率值。这种问题称为随机约束规划，是由 Charnes 和 Cooper(1954) 首先提出的。例如在确定性资本预算问题中相应的约束方程为

$$\sum_{i=1}^{m} a_{it}x_i \leqslant b_t \tag{2.35}$$

其中 a_{it} 表示 t 年的项目 i 的支付，x_i 为第 i 个项目的投资份额，当 b_t 为 t 年可用预算，M 为可供选择的项目个数。当 a_{it}、b_t 均为随机变量时，若管理者要求 x_i 的选择只要各有 95%满足约束式(2.35)就可以了，那么允许以不超过 5%可能性不满足约束，即有

$$P(\sum_{i=1}^{m} a_{it}x_i > b_i) \leqslant 0.05$$

要解此随机规划问题，首先要把约束方程式(2.34)转化为等价的确定性约束形式。Charnes 和 Cooper 提出了几种处理方法。对于线性目标函数问题，如果能把随机约束方程转化为线性约束方程那么就可用常规(LP)方法或整数规划方法求解了。

满足下列条件的随机约束方程可以转化为确定型线性约束

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

方程：

(1) 全部或部分 b_i、c_j 为随机变量，a_{ij} 是常量；

(2) 输入的随机变量 b_i 和 c_j 在统计上是互相独立的；

(3) 各个输入随机变量 b_i 是正态分布的，其均值为 $E(b_i)$，标准差为 σ_{bi}；

(4) 各个输入随机变量 c_j 具有已知均值 $E(c_j)$；

(5) 问题的目标是极大化目标函数的期望值。

下面我们介绍 Hiller 和 Lieberman(1967)的转化方法。将式(2.34)化为

$$p\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sigma_{bi}} \leqslant \frac{b_i - E(b_i)}{\sigma_{bj}}\right) \geqslant P_i \qquad i=1,2,\cdots,m; \quad (2.36)$$

由条件(3)知 $\dfrac{b_i - E(b_i)}{\sigma_{bi}}$ 是均值为 0、标准差为 1 的标准正态分布的随机变量。

假定 Y_i 为均值为 0、标准差为 1 的标准正态分布的随机变量，那么 Y_i 不小于常数 K_{Pi} 的概率(P_i)记为

$$P(K_{Pi} \leqslant Y_i) = P_i \quad (2.37)$$

那么当

$$P\left[K_{Pi} \leqslant \frac{b_i - E(b_i)}{\sigma_{bi}}\right] = P_i \quad (2.38)$$

时，若有

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sigma_{bi}} \leqslant K_{Pi} \quad (2.39)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

则必有

$$P[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i] \geqslant P_i \qquad i=1,2,\cdots,m$$

由式(2.39)可以得到约束方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant E(b_i) + K_{Pi}\sigma_{bi} \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{2.40}$$

约束式(2.40)等价于随机约束方程式(2.34)，于是我们可得到等价于随机规划问题的 LP 问题：

$$\max \quad E(Z)=\sum_{j=1}^{n} E(c_i)x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant E(b_i) + K_{Pi}\sigma_{bi} \qquad i=1,2,\cdots,m; \tag{2.41}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

现在我们只需把 K_{Pi} 求出就可以了。这可以由标准正态分布表 2.8 求出。图 2.3(a)上的曲线为标准正态分布曲线，曲线下的面积为 1。表 2.8 列出了从原点 0 到 $Z(Z\geqslant0)$的曲线下的面积 S(即随机变量 $0\leqslant Y\leqslant Z$ 的概率值)。例如当 $Z=0$ 时，$S=0$，当 $Z=1.0$ 时，$S=0.341\ 3$。那么 $P(Z\leqslant Y)=0.5-S$，例如 $P(1.0\leqslant Y)=0.5-0.341\ 2=0.158\ 7$。当 $Z<0$ 时，那么由正态分布曲线的对称性知 $P(Z\leqslant Y)=\ P(0\leqslant Y\leqslant -Z)+0.5$，如图 2.3(b)上阴影面积。反之如果已知 P 值我们也可相应地求出 Z 值。例如我们要求 K_P，使 $P(K_P\leqslant Y)=0.575\ 3$，那么 $P(0\leqslant Y\leqslant -K_P)=0.075\ 3$，查表 2.8 得$-K_P=0.19$，即 $K_P=-0.19$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

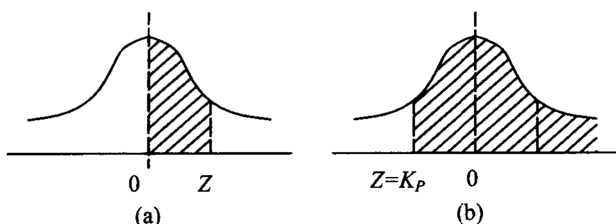


图 2.3 利用标准正态分布曲线求 K_P

我们将第 2.4 节的例 1 即问题(2.23)改变为随机规划问题：

$$\max \quad E(Z)=12x_1+5x_2+10x_3+20x_4+16x_5+\alpha_3-\beta_3$$

$$\text{s.t.} \quad 7x_1+9x_2+2x_3+12x_4+3x_5+5x_6+\alpha_1-\beta_1\leqslant 25 \qquad (2.42)$$

$$P(3x_1+2x_2+3x_3+6x_4+5x_5-1.1\alpha_1+\alpha_2+1.1\beta_1-\beta_2\leqslant b_2)\geqslant P$$

$$P(-18x_1-17x_2-8x_3-25x_4-13x_5-9x_6-1.1\alpha_2+\alpha_3+\beta_2-\beta_3\leqslant b_3)\geqslant P$$

$$\beta_1\leqslant 10,\ P(\beta_2\leqslant c_2)\geqslant P,\ P(\beta_3\leqslant c_3)\geqslant P,\ \alpha_t,\ \beta_t\geqslant 0,\ t=1,2,3$$

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{当项目}i\text{被采用时}\\ 0, & \text{当项目}i\text{不被采用时}\end{cases}$$

这里 b_1 和 b_2 是均值分别为 20 和 21，标准差为 3 和 4 的正态分布的随机变量。c_2 和 c_3 是第 2 年和第 3 年借入资金限制量，它们也是正态分布的随机变量，其均值分别为 7 和 1，标准差分别为 1 和 0.5。其中 P 是各约束概率约束值。以上这些变量均认为是独立的。应用式(2.40)上述问题可化为线性规划问题

$$\max \quad E(Z)=12x_1+5x_2+10x_3+20x_4+16x_5+\alpha_3-\beta_3$$

$$\text{s.t.} \quad 7x_1+9x_2+2x_3+12x_4+3x_5+5x_6+\alpha_1-\beta_1\leqslant 25 \qquad (2.43)$$

$$3x_1+2x_2+3x_3+6x_4+5x_5-1.1\alpha_1+\alpha_2+1.1\beta_1-\beta_2\leqslant 20+3K_P$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 2.8 累计正态频率分布（标准正态曲线之下从 0 到 Z 的面积）

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000 0	0.0041 0	0.008 0	0.012 0	0.016 0	0.019 9	0.023 9	0.027 9	0.031 9	0.035 9
0.1	0.039 8	0.043 8	0.047 8	0.051 7	0.055 7	0.059 6	0.063 6	0.067 5	0.071 4	0.075 3
0.2	0.079 3	0.083 2	0.087 1	0.091 0	0.094 8	0.098 7	0.106 4	0.106 4	0.110 3	0.114 1
0.3	0.117 9	0.121 7	0.125 5	0.129 3	0.133 1	0.136 8	0.144 3	0.144 3	0.148 0	0.151 7
0.4	0.155 4	0.159 1	0.162 8	0.166 4	0.170 0	0.173 6	0.180 8	0.180 8	0.184 4	0.187 9
0.5	0.191 5	0.195 0	0.198 5	0.201 9	0.205 4	0.208 8	0.215 7	0.215 7	0.219 0	0.222 4
0.6	0.225 7	0.229 1	0.232 4	0.235 7	0.238 9	0.242 2	0.248 6	0.248 6	0.351 7	0.254 9
0.7	0.258 0	0.261 1	0.264 2	0.267 3	0.270 4	0.273 4	0.279 4	0.279 4	0.282 3	0.285 2
0.8	0.288 1	0.290 1	0.293 9	0.296 7	0.299 5	0.302 3	0.307 8	0.307 8	0.310 6	0.313 3
0.9	0.315 9	0.318 6	0.321 2	0.323 8	0.326 4	0.328 9	0.334 0	0.334 0	0.336 5	0.338 9
1.0	0.341 3	0.343 8	0.346 1	0.348 5	0.350 8	0.353 1	0.357 7	0.357 7	0.359 9	0.362 1
1.1	0.364 3	0.366 5	0.368 6	0.370 8	0.372 9	0.374 9	0.379 0	0.379 0	0.381 0	0.383 0
1.2	0.384 9	0.386 9	0.388 8	0.390 7	0.392 5	0.384 4	0.398 0	0.398 0	0.399 7	0.401 5
1.3	0.403 2	0.404 9	0.406 6	0.408 2	0.409 9	0.411 5	0.414 7	0.414 7	0.416 2	0.417 7
1.4	0.419 2	0.420 7	0.422 2	0.423 6	0.425 1	0.426 5	0.429 2	0.429 2	0.430 6	0.431 9
1.5	0.433 2	0.434 5	0.435 7	0.437 0	0.438 2	0.439 4	0.441 8	0.441 8	0.442 9	0.444 1
1.6	0.445 2	0.446 3	0.447 4	0.448 4	0.449 5	0450 5	0.452 5	0.452 5	0.453 5	0.454 5
1.7	0.455 4	0.456 4	0.457 3	0.458 2	0.459 1	0.459 9	0.461 6	0.461 6	0.462 5	0.463 3
1.8	0.464 1	0.464 9	0.465 6	0.466 4	0.467 1	0.467 8	0.469 3	0.469 3	0.469 9	0.470 6
1.9	0.471 3	0.471 9	0.472 6	0.473 2	0.473 8	0.474 4	0.475 6	0.475 6	0.476 1	0.476 7

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.477 2	0.477 8	0.478 3	0.478 8	0.479 3	0.479 8	0.480 3	0.480 8	0.481 2	0.481 7
2.1	0.482 1	0.482 6	0.483 0	0.483 4	0.483 8	0.484 2	0.484 6	0.485 0	0.485 2	0.485 7
2.2	0.486 1	0.486 4	0.486 8	0.487 1	0.487 5	0.487 8	0.488 1	0.488 4	0.488 7	0.489 0
2.3	0.489 3	0.489 6	0.489 8	0.490 1	0.490 4	0.490 6	0.490 9	0.491 1	0.491 3	0.491 6
2.4	0.491 8	0.492 0	0.492 2	0.492 5	0.492 7	0.492 9	0.493 1	0.493 2	0.493 4	0.493 6
2.5	0.493 8	0.494 0	0.494 1	0.494 3	0.494 5	0.494 6	0.494 8	0.494 9	0.495 1	0.495 2
2.6	0.495 3	0.495 5	0.495 6	0.495 7	0.495 9	0.496 0	0.496 1	0.496 2	0.496 3	0.496 4
2.7	0.496 5	0.496 6	0.496 7	0.496 8	0.496 9	0.497 0	0.497 1	0.497 2	0.497 3	0.497 4
2.8	0.497 4	0.497 5	0.497 6	0.497 7	0.497 7	0.497 8	0.497 9	0.497 9	0.498 0	0.498 1
2.9	0.498 1	0.498 2	0.498 2	0.498 3	0.498 4	0.498 4	0.498 5	0.498 5	0.498 6	0.498 6
3.0	0.498 7	0.498 7	0.499 7	0.498 8	0.498 8	0.498 9	0.498 9	0.498 9	0.499 0	0.499 0
3.1	0.499 0	0.499 1	0.499 1	0.499 1	0.499 2	0.499 2	0.499 2	0.499 2	0.499 3	0.499 3
3.2	0.499 3	0.499 3	0.499 4	0.499 4	0.499 4	0.499 4	0.499 4	0.499 5	0.499 5	0.499 5
3.3	0.499 5	0.499 5	0.499 5	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 7
3.4	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 8
3.6	0.499 8	0.499 8	0.499 9	0.499 9	0.499 9	0.499 9	0.499 9	0.499 9	0.499 9	0.499 9
3.9	0.500 0									

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$P(-18x_1-17x_2-8x_3-25x_4-13x_5-9x_6-1.1\alpha_2+\alpha_3+1.1\beta_2-\beta_3 \leqslant 21+4K_P$

$$\beta_1 \leqslant 10,\ \beta_2 \leqslant 7+K_P,\ \beta_3 \leqslant 1+0.4K_P,\ \alpha_t,\ \beta_t \geqslant 0,\ t=1,2,3$$

$$x=\begin{cases} 1, & \text{当项目}i\text{被采用时} \\ 0, & \text{当项目}i\text{不被采用时} \end{cases}$$

表 2.9 上列出了不同 P 值的 K_P 值，可以看出随着 P 值的下降，可行解范围扩大了，因而目标函数最优值也随之上升。表 2.10 上列出了对不同 P 值，问题(2.42)的 LP 最优解与 IP 的最优解。

随机约束规划转化为等价确定性规划的方法与转化结果，取决于输入的随机变量 a_{ij}、b_i、c_j 的特征，在某些情形下，概率约束可能转化为非线性的确定性约束，这就使问题更为困难与复杂了。

表 2.9　各种概率 P 值对应的 K_P 值

P	0.99	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.50	0.45	0.40
K_P	-2.33	-1.645	-1.28	-1.037	-0.841	-0.674	-0.527	-0.385	0.0	0.127	0.255
$20+3K_P$	13.01	15.065	16.16	16.889	17.477	17.978	18.419	18.845	20	20.381	20.765
$21+4K_P$	11.68	14.42	15.88	16.852	17.636	18.304	18.892	19.46	21	21.508	22.02
$7+K_P$	4.67	5.355	5.72	5.963	6.159	6.326	6.473	6.615	7	7.127	7.255
$1+0.4K_P$	0.068	0.342	0.488	0.585 2	0.663 6	0.7304	0.789 2	0.846	1	1.050 8	1.102

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 2.10 各种 P 值下问题（2.42）的 LP 与 IP 的最优解

最优解	概率P值											
	0.99		0.95		0.90		0.85		0.80		0.75	
	LP	IP	LP	IP	LP	IP	LP	IP	LP	IP	LP	IP
x^*_1	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_2	0.150	0.0	0.38	0.0	0.50	0.0	0.58	0.0	0.65	0.0	0.71	0.0
x^*_3	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_4	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_5	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_6	0.00	0.0	0.00	0.0	0.00	1.0	0.00	1.0	0.00	1.0	0.00	1.0
α^*_1	0.00	1.0	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.15	6.00	4.64	6.00
α^*_2	0.00	1.78	0.00	4.52	0.00	0.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
α^*_3	73.09	72.50	78.99	77.50	82.13	83.12	84.22	84.89	85.91	86.32	87.35	87.54
β^*_1	0.35	0.00	2.42	0.00	3.52	4.00	4.26	4.00	10.00	10.00	10.00	10.00
β^*_2	4.67	4.67	5.36	5.36	5.72	5.72	5.96	4.51	6.16	3.92	6.32	3.42
β^*_3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Z^*	131.83	130.50	138.89	135.50	142.64	141.12	145.15	142.89	147.16	144.32	148.88	145.54

最优解	概率P值									
	0.70		0.65		0.50		0.45		0.40	
	LP	IP	LP	IP	LP	IP	LP	IP	LP	IP
x^*_1	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_2	0.76	0.0	0.80	0.0	0.93	0.0	0.98	0.0	1.00	1.0
x^*_3	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_4	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_5	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0
x^*_6	0.00	1.0	0.00	1.0	0.00	1.0	0.00	1.0	0.04	0.0
α^*_1	4.20	6.0	3.77	6.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
α^*_2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.60	0.00	0.00	0.00	0.00
α^*_3	88.62	88.61	89.84	89.65	93.16	92.46	94.26	93.39	95.40	95.28
β^*_1	10.00	10.00	10.00	10.00	7.39	4.00	7.78	4.00	8.20	8.00
β^*_2	6.47	2.98	6.61	2.56	7.00	7.00	7.13	1.02	7.26	7.03
β^*_3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Z^*	150.40	146.61	151.86	147.65	155.82	150.46	157.13	151.39	158.40	158.28

注：Z^*、α^*_1、α^*_2、α^*_3、β^*_1、β^*_2、β^*_3、、的单位为 1000 元，LP 为线性规划，IP 为整数规划。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第 3 章　不确定型投资决策方法

3.1　概述

在项目评估或作出投资决策时，人们经常会面对自然状态不完全确定的情形。例如在考虑对某个商品作投资时必须面对今后若干年内经济发展的各种势态。在大多数情形下，决策者可以根据以往经验或历史资料估计各种自然状态出现的可能性大小(即概率)，并由此作出决策，但无论决策人作出什么决策，他都可能得到与预期相反的结果。因此，这种决策是要冒一定风险的，这种不确定决策问题也称为风险型决策。

一个风险型决策应具备以下 5 个条件：

(1) 存在着决策人希望达到的目标；

(2) 存在着两个以上不以决策人的主观意志而转移的自然状态，且必定而且只能出现一种状态；

(3) 存在着两个以上行动方案可供决策人选择；

(4) 不同行动方案在不同自然状态下的效用即益损(或报酬，风险)值可以计算出来；

(5) 各种自然状态出现的可能性(即概率)可预先估计或计算出来，并且各种自然状态出现的概率之和为 1。

例 1　假定某公司要确定对一项工程投资，如果投资后经济景气则可获利润 5 万元；若投资后经济不景气，将损失 2 万元；若不投资则不论经济状态如何均需付出调研费 5 000 元，这一问题可用表 3.1 表示。

表中自然状态是不以决策人的意志而转移的，故也称为不可控因素，而行动方案是由决策人选择的，故称为可控因素。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

益损值所构成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}50 & -20\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$

称为益损矩阵。

风险型决策模型的基本结构是

$$A=(a_{ij})=(F(A_i,\ \theta_j))$$

其中，a_{ij} 为在自然状态 θ_j 下采取行动方案 A_i 的益损值，它是 A_i，θ_j 的函数；A_i 是第 i 个行动方案，称为决策变量；θ_j 是第 j 个自然状态，称为状态变量。

表 3.1 风险型决策问题

自然状态 / 益损值(万元) / 概率 $P(\theta)$ / 行动方案	经济景气 θ_1	经济景气 θ_2
	0.6	0.4
A_1(投资)	50	−20
A_2(不投资)	−5	−5

一般地，益损矩阵可表示为表 3.2。

表 3.2 风险型决策一般形式

自然状态 / 益损值(万元) / 概率 $P(\theta)$ / 行动方案	θ_1	θ_2	…	θ_n
	$P(\theta_1)$	$P(\theta_2)$	…	$P(\theta_n)$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
⋮	⋮			
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

上述风险型决策过程可由图 3.1 表示。在某些情形下自然状态出现的概率往往难以确定，甚至自然状态本身可能有无穷多种，其益损值也不是确定的。例如股市的行情瞬间就可能发生千变万化。这类决策的不确定性更大，因而风险也更大，本章对这类不确定型问题只概略地提及一些简单处理准则，在下

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

一章中将详细讨论股票投资的特点与基本理论。

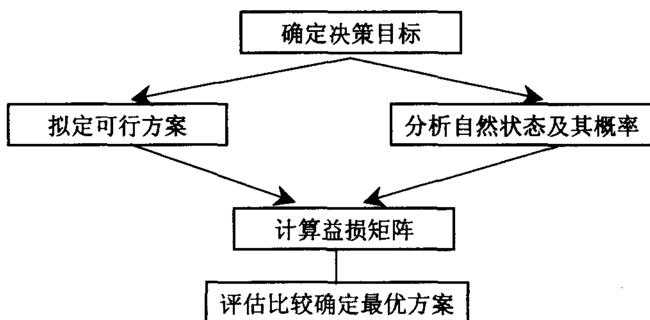


图 3.1　风险型决策过程

3.2　自然状态概率的确定方法

在风险决策中自然状态概率的确定对方案选择起了重要作用。自然状态虽属不可控因素，但却要人们根据已占有的资料估计取得。如果估计错误或误差过大，那么就会影响决策的正确性。有时为了求得一个比较准确的概率,可能花费相当多的人工与费用,因而应根据实际情况对估计的准确性提出适当要求。

3.2.1　通过对事物的分析确定概率

在某些情形下，人们可以通过分析，确定事物发生的概率。譬如一枚硬币在一次投掷中正面与反面出现的概率相同，均为 $\frac{1}{2}$。这一结论是基于人们对事物性质的认识获得的。若认为 n 个随机出现的事件的概率相同，而且必定出现其中之一，那么每个随机事件出现的概率就是 $\frac{1}{n}$。

例 1　某施工队工人中有 50％人会木工，有 65％的人会瓦

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

工，有 85%的人会木工或瓦工中的一种，问同时会两种手艺的工人的百分比是多少？

解：因为(0.50+0.65)−0.85=0.3，故应有 30%的工人既会木工又会瓦工。

应用概率论的基本知识，可以对一些比较简单的事件确定其发生的概率。

3.2.2 通过对历史资料的处理或通过随机试验确定事件发生的概率

如果想得到夏季雨天的概率，可以查阅历史资料，最简单的统计处理方法是用历史上夏天雨天出现的频率代替概率。这种根据统计规律得到的概率也称客观概率。

例 2 假设在某项工程的投标中，承包商甲对工程的估价为 A，报价为 B。他的竞争对手是乙，已知乙在历次投标中报标与估价之比的统计资料(表 3.3)，要估计承包商甲各种报价(即 $\frac{B}{A}$)策略的中标概率。

表 3.3 各种报价出现频率

乙报价 B/A	出现次数 F	出现频率 $F/\sum F$
0.8	1	0.01
0.9	2	0.03
1.0	8	0.10
1.1	14	0.19
1.2	22	0.30
1.3	19	0.26
1.4	6	0.08
1.5	2	0.03
$\sum F$	74	100

表 3.4 各种报价中标概率

甲报价 B/A	中标概率
0.75	1.00
0.85	0.99
0.95	0.95
1.05	0.86
1.25	0.37
1.35	0.11
1.45	0.03
1.55	0

在投标中若甲的报价低于乙的报价时可中标(即获得该工

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

程)由此可估计各种报价下的中标概率。例如当承包商甲的报价为 1.25A 时乙的报价超过 1.25A 的概率为

$$P_{乙}(\frac{B}{A}>1.25)=0.37$$

故甲报价为 1.25A 的中标概率为 0.37。表 3.4 列出了甲的各种报价下的中标概率。

3.2.3 主观概率试验法

有许多决策问题可以用来确定概率的历史资料很少或者没有，同时又不允许人们进行随机试验。此时随机事件的概率，只能利用对事件的知识和经验都很丰富的有关专家头脑中的信息来确定。这样确定的概率称为主观概率(或先验概率)，以区别通过随机试验或者历史资料得到的客观概率。例如出门旅行估计天气好坏、购票难易等所进行的猜测和判断就属于主观概率。当然要能比较正确地确定主观概率，仍有赖于对事件所作的周密观察，以获得先验信息，先验信息越丰富，设置的主观概率就越准确。

在确定主观概率时，有时先验信息往往是模糊不清的，往往需要通过试验途径来确定，这就是主观概率试验法。

主观概率试验法可以这样进行：将一个概率设定的事件作为基准，将它与概率待定事件进行比较，不断调整前者的概率。直到受试人认为两个事件发生的可能性相同时，给定事件的概率就是待定事件的概率。

例 3 为了确定下一天天气好的概率 $P(E)$，我们给出一个以 50％机会得到 100 和 50％机会失去 100 的给定事件。将它与下一天天气好得到 100，天气不好损失 100 的事件相比较，让受试人选择。若受试人选择后者，说明天气好的可能性大于 50％，改变给定事件的概率为 60％的机会得到 100，40％的机会

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

损失 100，再让受试人选择，若受试人认为两个事件得利相同，那么 $P(E)=0.6$，即天气好的概率为 0.6，否则再进行调整，直到受试人认为出现两个事件的机会相同为止。

3.2.4 利用信息修正主观概率

应用上述方法得到先验概率后，如果又获得了新的信息，利用它对原来的概率进行修正。修正后的概率称为后验概率。只要新的信息是有价值的，无疑地修正后的概率会更符合实际情形。

获得新信息有多种途径，其中之一就是进行“咨询”。通过咨询得到的信息如果是有价值的，将有助于正确决策，因而会带来经济效益。但咨询需要一定费用，我们应当在咨询费用和它带来的经济效益之间权衡，判断是否值得咨询。关于信息的价值我们将在后面详细讨论。

3.3 效用函数与风险价格

3.3.1 效用值的含义

在第 1 章中我们已对不同时期的消费提出了效用函数的概念。本章将从风险和不确定角度讨论效用函数以及它的应用。

例 1 设有一个投资为 200 万元的工厂，该厂发生火灾的可能性为 0.1%，工厂的决策者面临的问题是要不要参加保险，若参加保险，那么每年支付保险费 2 500 元，一旦发生火灾，保险公司将偿还工厂全部资产；若不参加保险，就不需支付保险费，但一旦发生火灾，工厂的决策者将承担全部损失。若以工厂支出作为决策的标准，那么发生火灾的期望损失为 $200\times0.001=0.2$ 万元，比一年的保险费还少。结论似乎应为不参加保险。但实际上结论往往相反，大多数工厂决策者都愿意参加

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

保险。由此可见，在不同风险条件下等额货币具有不同的价值，即具有不同的效用。这里效用是在有风险情形下决策人对后果偏好的量化。效用的大小用效用值表示。

例 2 某甲有两种方式可以投资。第一种投资方式是一般储蓄，那么必可得利息 100 元，第二种是有奖储蓄，若抽中得奖 300 元，若抽不中则没有奖金和利息。两种可能的概率均为 50%，那么甲将按哪种方法储蓄呢？第一种方式的收益为 100 元，第二种方式的收益为 300×0.5＝150 元，它比第一种方式期望收益多得 50 元，但可能什么也得不到。甲考虑后选择了第一种方式，可见在甲看来无风险的 100 元其效用超过有风险的 300 元。这时，如果将奖金由 300 元升到 500 元，这时甲认为两种方式具有相同的吸引力，即认为具有 50%风险的 500 元与稳得 100 元具有相同的效用。若第二种方式的奖金仍为 300 元，但中奖概率提高到 80%，此时甲认为也可按第二种方式储蓄，即两者具有相同效用。

由于社会经济条件的不同，人们对于风险会有不同态度。例如某乙的经济条件较好，并有一定冒险精神，那么他会选择第二种方式，即认为具有 50%机会获得 300 元的效用大于稳得 100 元。由此可以看出：

(1) 同一货币量在不同风险情形下对同一个人具有不同的效用值；

(2) 在相同风险度下，不同的人对风险会持不同态度，因此相同的货币量对不同的人具有不同的效用。

效用值的大小由效用函数确定。

3.3.2 效用函数

(1) 风险或不确定条件下选优公理

设 x，y，z…是可供决策者选择的事件，S 为可供选择的事

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

件集。S 既可包含确定的基本事件也可包含随机事件。对任何 x，$y \in S$，用 $x \succ y$ 或 $y \prec x$ 表示 x 优于 y；$x \sim y$ 表示 x 与 y 同样好；$x \succ = y$ 或 $y = \prec x$ 表示 y 不优于 x。

设 x，$y \in S$ 是互斥事件，如果我们以概率 a 选择 x 而以概率$(1-a)$选择 y，那么我们把这一事件记作 $G(x，y：a)$。

公理 1 可比性

对任意 x，$y \in S$，决策者必具有下列认识之一：①x 优于 y ②y 优于 x ③x 与 y 完全一样。

公理 2 传递性(或一致性)

若 $x \succ y$ 且 $y \succ z$，则必有 $x \succ z$;若 $x \sim y$ 且 $y \sim x$ 则必有 $x \sim z$。

公理 3 强独立性

设 x、y、z 是 S 中完全互斥的事件，如果 $x \sim y$ 则对任意第三个事件 z 有 $G(x，z：a) \sim G(y，z：a)$

公理 4 可测性

设 x，y $z \in S$，满足 $x \succ y \succ = z$，则必存在唯一的 a 使 $y \sim G(x，z：a)$。

公理 5 有序性

设 $x \succ = y \succ = z$ 和 $x \succ = u \succ = z$，并且 $y \sim G(x，z：a_1)$，$u \sim G(x，z：a_2)$那么若 $a_1 > a_2$ 则必有 $y \succ u$，若 $a_1 = a_2$ 则必有 $y \sim u$。

在考虑效用模型时，对基本事件，其效用应满足公理 1、公理 2，对随机事件，其效用应满足公理 3～5。这样的效用函数 $U(*)$必定存在，并且具有性质：

1) 效用函数是有序的，即若 $U(x) > U(y)$则必有 $x \succ y$；若 $U(x) = U(y)$，那么 $x \sim y$。

2) 随机事件的序是由相应的效用函数期望值确定，即

$$U(G(x，y：a)) = aU(x) + (1-a)U(y)。$$

设 $a \succ b$ 且 a，$b \in S$，那么对于任意 $a \succ x \succ b$，$a \succ y \succ b$ 必定存在概率函数 $a(x)$，使得 $x \sim G(a，b：\alpha(x))$，$y \sim G(a，b：\alpha(y))$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

如果 $x \succ z \succ y$，那么容易证明存在 $0<\beta<1$，使

$$\alpha(z)=\beta\alpha(x)+(1-\beta)\alpha(y)$$

从而

$$z \sim G(x, y: \beta)=G(a, b: \alpha(z))$$

(2) 效用函数的构造

从上面讨论可以看出，效用函数只是一个有序函数，因而它不是唯一的。保持事物次序的函数不止一个，例如表示物体温度的就有华氏和摄氏两种。但它们都可以单调地互相转换。效用函数也是如此，我们可以根据 5 个公理对任意两个财富给以效用值由此可以推出其他财富的效用值。

例 3 表 3.5 列出了 11 种随机事件的可能损失与收益以及它们发生的概率。决策者认为无论哪一种事件都与确定地获得“0”即无相当。要确定各种损失及收益的效用值。

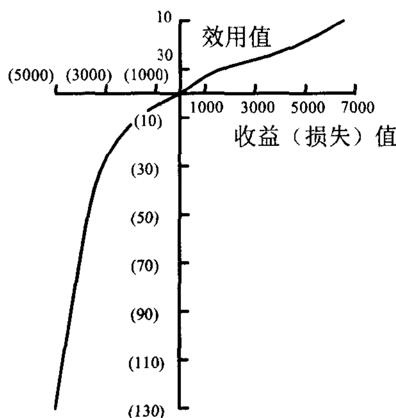


图 3.2 效用曲线

解：首先(任意地)对 $-1\,000$ 元和 0 元赋予效用值

$$U(-1\,000)=-10, \quad U(0)=0$$

那么对事件 1 有 $0 \sim G(1\,000, -1\,000: 0.6)$，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

故　　$U(0)=0.6U(1\,000)+0.4(-1\,000)$即

$0=0.6U(1\,000)+0.4(-10)$，

得到　　$U(1\,000)=4\div0.6=6.7$

同样地由事件 2 得到 $0\sim G(2\,000，-1\,000：0.55)$

得到　　$U(2\,000)=8.2$

这样可以把所有损失与收益的效用值算出，计算结果列于表 3.6。图 3.2 作出了相应的效用曲线。

表 3.5　各事件的益损与概率

事件	损失值	收益值	收益概率
1	−100 0	100 0	0.60
2	−100 0	200 0	0.55
3	−100 0	300 0	0.50
4	−100 0	400 0	.045
5	−100 0	500 0	0.40
6	−100 0	600 0	0.35
7	−100 0	700 0	0.30
8	−200 0	200 0	0.75
9	−300 0	300 0	0.80
10	−400 0	400 0	0.85
11	−500 0	500 0	0.90

表 3.6　各事件的益损对应的效用值

损失	效用值	收益值	效用值
−100 0	−10.0	100 0	6.7
−100 0	−10.0	200 0	8.2
−100 0	−10.0	300 0	10.0
−100 0	−10.0	400 0	12.2
−100 0	−10.0	500 0	15.0
−100 0	−10.0	600 0	18.6
−100 0	−10.0	700 0	23.3
−200 0	−24.6	200 0	8.2
−300 0	−40.0	300 0	10.0
−400 0	−69.2	400 0	12.2
−500 0	−135.0	500 0	15.0

3.3.3　对待风险的态度

每个决策者都有自己对待风险的态度，这种态度可以通过效用函数给予描述，假设有两种事件，第一种为随机事件 $G(a，b：\alpha)$，取

$$A=\text{期望支付}=\alpha a+(1-\alpha)b$$

A 是一个确定值，取第二个事件为 $G(A，B：1)$其中 B 是任意事件，那么 $G(A，B：1)$是具有 $G(a，b：\alpha)$的期望支付的确定事件，我们定义某个决策人为：

(1) 风险追求者(即冒险型决策者)，如果他认为 $U[G(a，b：$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

α)]>U[G(A，B：1)]；

(2) 风险规避者(即保守型决策者)，如果他认为 U[G(a，b：α)]<U[G(A，B：1)]；

(3) 风险中立者(即中间型决策者)，如果他认为 U[G(α，b：a)]=U[G(A，B：1)]。

假设初始财富为 w_0，那么由公理可知：

$$U[G(a,\ b:\ \alpha)]=\alpha U(W_0+a)+(1-\alpha)U(W_0+b)$$

$$U[G(a,\ b:\ 1)]=U(W_0+A)=U[W_0+\alpha a+(1-\alpha)b]$$

不失一般性设 $W_0=0$，那么：

对风险追求者有 $\alpha U(a)+(1-\alpha)U(b)>U[\alpha a+(1-\alpha)b]$；

对风险规避者有 $\alpha U(a)+(1-\alpha)U(b)<U[\alpha a+(1-\alpha)b]$；

对风险中立者有 $\alpha U(a)+(1-\alpha)U(b)=U[\alpha a+(1-\alpha)b]$。

这样个体对风险的态度就可用效用函数表征了。图 3.3 上表示了三种不同风险态度的效用曲线，其中风险追求者的效用曲线是凸函数，其财富的效用增加速度随财富而增加。风险规避者的效用曲线是凹函数，其效用增加速度随财富增加而下降。而风险中立者的效用曲线是直线，其效用以定常速度随财富而增加。

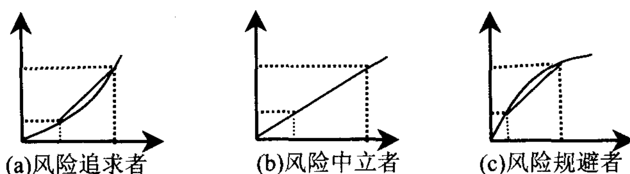


图 3.3　三种效用曲线

3.3.4　等价性，风险溢价与风险事件价格

设 G 是某个风险事件，A 是该事件的期望收益。假设决策者认为接受事件 G 的财富与接受定值 CE(G)的结果相同，则

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$CE(G)$(对于决策者来说)称为事件 G 的等价值，而$-CE(G)$就是该风险事件 G 的价格。

如果决策者最初有财富 W_0，那么对事件 $G(a，b：\alpha)$有：

$$\alpha U(W_0+a)+(1-\alpha)U(W_0+b)=U(W+CE(G))$$

并且

对风险追求者有 $CE(G)>A$；

对风险规避者有 $CE(G)<A$；

对风险中立者有 $CE(G)=A$。

对风险规避者来说，为了避免风险事件 G 而得到确定值 A 就要支付［$A-CE(G)$］作为保险，故可定义风险溢价：

$$风险溢价= A-CE(G)$$

对风险追求者来说，风险溢价为负，即他愿意为追求风险收益而作出支付；对风险规避者而言该值为正，即他愿意为规避风险而作出支付；对风险中立者而言，该值为 0。

当 $A=0$ 时，风险溢价$=-CE(G)$，这就是风险事件的价格。

例 4 设某甲要面对一个风险事件 $G(-5，20：08)$，他的初始财富为 10 元，他的效用曲线为对数曲线 $U(W)=\ln(W)$，这里 W 是他的财富。要求风险溢价和该风险事件价格。

解：接受风险事件的效用为

$$0.8U(10-5)+0.2U(10+20)=0.8\ln5+0.2\ln30=1.97 元$$

相应财富为：

$$1.97=\ln(W)，故 W=7.17 元$$

那么接受事件 G 的结果是支付 $10-7.17=2.83$ 元，故 $CE(G)=-2.83$ 元。同时事件 G 的期望收益 $A=0.8(-5)+0.2(20)=0$，故风险溢价$=0-(-2.83)=2.83$ 元，且事件的价格也为 2.83 元。

例 5 将上例中风险事件改为 $G(10，100：0.10)$，此时接受风险事件的效用为

$$0.1U(10+10)+0.9U(10+100)=0.1\ln(20)+0.9\ln(110)=4.53$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$4.53=\ln(10+CE(G)),\ 故\ CE(G)=82.76$$

故事件价格为-82.76，事件收益期望值 $A=0.1(10)+0.9(100)=91$，风险溢价$=91-82.76=8.24$。

3.4 风险型决策准则

3.4.1 期望值准则

假设我们有 A_1，…，A_m个行动方案以及它们在不同自然状态 θ_j下的益损期望值 a_{ij}，自然状态 θ_j的概率为 P_j，$j=1$，…，n。那么方案 A_i的益损期望值为

$$E(A_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_j \qquad j=1,\ \cdots,\ m \tag{3.1}$$

决策者可根据期望值大小进行选择。若益损值代表成本、支出费用等，则应选择期望值最小的方案作为最优方案；若益损值代表利润、收益等，则应选择期望值最大的方案作为最优方案。

例 1 设某承包商要确定工程 A 的投标策略，他可采取投高标(记作 $A_{高}$)和投低标(记作 $A_{低}$)两种策略(关于投标问题请参阅第 5 章)。每种策略均可能有优、一般和赔三种效果，各种效果的概率与利润列于表 3.7。

表 3.7 方案各种效果的概率与利润

方案	状态	概率 P	利润(万元)
$A_{高}$	优	0.3	5.000
	一般	0.5	1.000
	赔	0.2	−3.000
$A_{低}$	优	0.2	4.000
	一般	0.6	0.500
	赔	0.2	−1.000

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

由表可得 $A_{高}$，$A_{低}$的期望益损值为

$E(A_{高})=0.3\times5.000+0.5\times1.000+0.2(-3.000)=1.400$ 万元；

$E(A_{低})=0.2\times4.000+0.6\times0.500\,0+0.2\times(-1.000)=1.000$ 万元。

故若从收益考虑，承包商对工程 A 宜投高标。

当以期望值最大作为目标时，如果有两个行动方案 A_i 与 A_j 的期望值相同，要确定它们的优劣可通过比较它们的益损值下界确定，即当 $E(A_i)=E(A_j)$，而它们的益损矩阵有

当 $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{ik}<\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{jk} \qquad 1\leqslant k\leqslant n$

时则认为 $A_j>A_i$。

当 $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{ik}=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{jk} \qquad 1\leqslant k\leqslant n$

时则认为 $A_j\sim A_i$。

反之，若以期望值最小作为目标时，可通过比较益损值的上界得到，即当 $E(A_i)=E(A_j)$时，

若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{ik}>\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{jk}$ 认为 $A_j>A_i$；

当 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{ik}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}_1 a_{jk}$ 时认为 $A_j\sim A_i$。

时则认为 $A_j\sim A_i$。

3.4.2 最大可能准则

一个事件的概率越大发生的可能性越大，在所有可能出现的自然状态中，找出一个概率最大的自然状态，把决策问题化为仅在此自然状态下的决策。从而将风险型决策转化为确定型决策。例如在例 1 中 $A_{高}$的最大可能收益为 1.000 万元，而 $A_{低}$的最大可能收益为 0.500 万元，故按此准则认为 $A_{高}\succ A_{低}$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

由于事件的概率只是说明事件发生的可能性的大小，并不是一定会发生的，所以以上的决策准则仍要冒一定风险。但由于应用了统计规律，这样做决策成功的还是占多数，比凭直觉或主观想像要合理和有效得多。

3.4.3 期望效用准则

以上两种方法，我们均直接以货币量作为比较依据，但在风险型决策中采用货币的效用值作为比较依据能更符合决策者的意图。

例 2 设有两个投资方案，预估利润及概率如表 3.8 所示，试比较方案优劣。

两个方案的期望利润分别为：

$$E(\text{I})=20\,000\times0.15+10\,000\times0.10+0\times0.65+(-2\,000)\times0.10=3\,800$$

$$E(\text{II})=40\,000\times0.05+20\,000\times0.20+(2\,000)\times0.35+(-3\,000)\times0.4=4\,100$$

故按期望值法，方案Ⅱ≻方案Ⅰ。

表 3.8 各方案的预估利润与概率 单位：元

	方案Ⅰ				方案Ⅱ			
利润	20 000	10 000	0	−2 000	40 000	20 000	−2 000	−3 000
概率	0.15	0.10	0.65	0.10	0.05	0.20	0.35	0.4

按最大可能法，方案Ⅰ≻方案Ⅱ。

现假设决策者对这些货币的效用值分别为

$U(-3\,000)=5$，$U(-2\,000)=-2$，$U(0)=0$，$U(1\,000)=5$，$U(20\,000)=8$，$U(40\,000)=12$，则两个方案的期望效用分别为

$$U(\text{I})=U(20\,000)\times0.15+U(10\,000)\times0.10+U(0)\times0.65+U(-2\,000)\times0.10=1.5$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$U(\text{II})=U(40\,000)\times0.05+U(20\,000)\times0.20+U(-2\,000)\times0.35+U(-3\,000)\times0.4=0.5$$

故方案Ⅰ≻方案Ⅱ。显然该决策人为风险规避者。

3.5 决策树

当决策是通过一系列过程作出时，可用决策树方法进行。决策树法是决策过程的一种有序概率图解法，故又称为概率分析决策方法。它把一系列具有风险性的决策环节联系成一个统一的整体，使决策者能统观决策全过程，并进行合理分析。决策树分析法是现代管理中的一种常用而有效的决策方法。

我们用一个例子来说明决策树的分析过程。

例 1 某工程单位要确定是否承担某项工程，若准备承担需耗资 4 万元进行调研和论证争取取得项目，设取得项目的概率为 60%。若争取到该项目，有三种方案可供选择：①自己进行开发设计，需费用 26 万元，成功的概率为 80%；②购买专利需费用 18 万元，成功概率为 50%；③对现有设备进行更新改造，需费用 16 万元，成功概率为 40%，无论哪种方案只要成功均能得到收益 60 万元，若失败则要罚款 10 万元，要确定最佳策略。

首先我们将一系列决策环节用树状图表示，树状图的分支处称为决策环节，决策环节有两种，一种是决策者可以主观抉择的环节，称为主观抉择环节，用方块“□”表示，也称为决策点。例如例 1 中第一个点 A 是确定准备承担还是不承担该工程就是一个主观抉择环节用□表示。由方块节点引出的分支称为决策枝，其分支数就是可供抉择的方案数。如果决定承担，那么进入环节 B，这是一个由客观环境确定的随机抉择环节，称为机会点用圆形节点“⊙”表示。例如决定承担此工程后能

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

否争取得到，要看客观机会，而不能由决策者自身决定。由这种节点引出的分支称为机会枝，每个分支均有一定概率，如由 *B* 引出两个分支：得到任务的概率为 0.6，失去任务的概率为 0.4，分支数就是自然状态数。

如果得到了任务，决策者可以自行确定工作方案，故下一个节点 *D* 又是一个主观抉择环节，每个方案又都有成功与失败的可能，故这又是一个机会点。成功获得收益，失败则蒙受损失。这样经过一系列环节，直到终端，用三角形“△”节点表示结果即末梢节点，由此获得一张最原始的决策图，并在图上标上：

(1) 对每个机会点的概率分支进行概率估计，并在分支上标出相应概率；

(2) 在每个结果节点上用方括号“[ ]”标出相应的净现值(或效用值、益损值)。图 3.4 作出了问题的决策树。

下面对各节点进行计算：

(1) 由后向前对每个机会点按其引出的概率分支算出期望益损值，并标于节点上方；

(2) 对每个决策点算出由它引出的各方案的最大期望益损值，并标于该节点上方，除保留的最佳分支外，在其他分支上均打上 ǂǂ 号，表示该分支已被删除，即已被剪枝。

最后得到了一个最佳决策过程以及相应的益损值(标在节点 *A* 的上方)。

本例中先计算各节点的益损值 $\Delta(C)$、$\Delta(E)$、$\Delta(\text{I})$、$\Delta(N)$。$\Delta(C)=0$，$A(E)=-4$，$\Delta(\text{I})=60-26-4=30$，$\Delta(J)=-10-26-4=-40$，$\Delta(K)=60-18-4=38$，$\Delta(L)=-10-18-4=-32$，$\Delta(M)=60-16-4=40$，$\Delta(N)=-10-16-4=-30$。

计算机会点 *F*、*G*、*H* 的期望收益 $E(F)$、$E(G)$、$E(H)$:

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$E(F)=3.0\times0.8-40\times0.2=16$，$E(G)=38\times0.5-32\times0.5=3$，$E(H)=40\times0.4-30\times0.6=-2$。

因为 $E(F)>E(G)>E(H)$，故 D 应采取自行开发们，将 G，H 剪支，且 $E(D)=16$，然后计算 B 点的期望值：

$$E(B)=16\times0.6+(-4)\times0.4=8(万元)$$

因为 $E(B)>\Delta(C)$，故 $E(A)=E(B)=8$(万元)，即该承包商应准备承担该项目，如果得到该项目应自行开发(F)，预计可得到期望收益 8 万元。

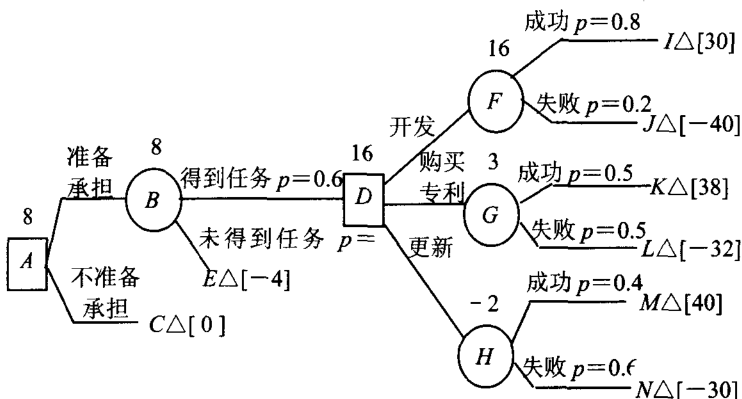


图 3.4　例 1 的决策村

例 2　某承包商因所拥有的资源有限，只能在 A、B 两项工程中选择一个进行投标，或者都不投标。无论对 A 或 B 均可采取投高标或投低标的策略。根据过去历史资料，投高标中标机会为 30%，而投低标中标机会为 50%，该承包商根据过去承包类似工程的统计资料得到三种状态(优、一般、赔)的出现概率与可能利润列于表 3.9 上。若对 A 投标不中时损失 5 万元，对 B 投标不中时损失 10 万元。试分析最优策略。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 3.9 例 2 的各种投标方案的可能状态概率和利润

节点	方案	状态	概率 P	利润(万元)
5	$A_{高}$	优 一般 赔	0.3 0.5 0.2	500 100 −60
6	$A_{低}$	优 一般 赔	0.2 0.6 0.2	400 70 −100
3	都不投		1.0	0
7	$B_{高}$	优 一般 赔	0.3 0.5 0.2	700 200 −100
8	$B_{低}$	优 一般 赔	0.3 0.6 0.1	600 100 −120

图 3.5 上作出了相应的决策树。我们来计算各点的期望收益节点 9：$E(9)=500\times0.3+100\times0.5-80\times0.2=184$

同理 $E(10)=102$，$E(11)=230$，$E(12)=228$

再计算 $E(5)=184\times0.3-5\times0.7=51.2$，

$E(6)=102\times0.5-5\times0.5=48.5$

$E(7)=230\times0.3-10\times0.7=62$，

$E(8)=228\times0.5-10\times0.5=109$

进行剪支由 $E(3)=0$，$E(2)=E(5)=51.2$，$E(4)=E(8)=109$，故剪去 2、3 支，得 $E(1)=E(4)=109$。

最后得到，若投 A 工程宜投高标，若投 B 工程宜投低标，从总体看，应选定 B 工程且投低标为宜。

以上计算中益损值均用净现值计算，也可用效用值计算，并且还可以列出方差，同时进行期望值与方差比较。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

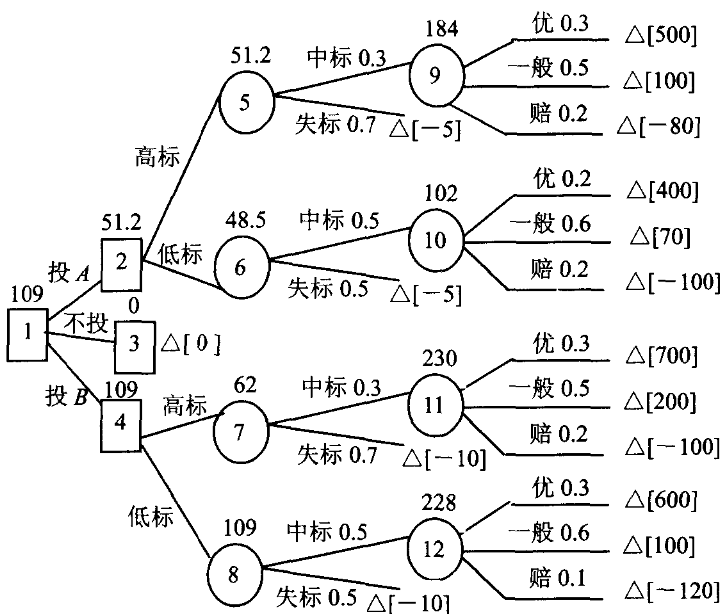


图 3.5 例 2 的决策树

3.6 避免和分散风险案例分析

我们在进行日常活动时会碰的到各种风险，对每个个体来说应尽量避免和分散风险，以使自己的财富有最大效用。而诸如保险市场金融市场的出现也对减轻和分散风险提供了条件。

3.6.1 保险市场分析

某甲具有初始资产 35 000 元，假设由于各种意外原因(例如住宅被盗、发生火灾等)，他有可能在一年中损失其中的 10 000 元，其发生的概率为 1%，即他拥有 25 000 元的概率为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

1%，而拥有 35 000 元的概率为 99%。现假定有 1 000 个这样的人，那么平均来说，每年就有 10 人发生损失，那么每年的平均损失为 10 万元。每人每年的期望损失为 0.01×10 000=100 元，假定每人发生损失的机会都不会影响其他人发生损失的概率，即风险是独立的，那么每人年末的期望财富为 0.99×35 000+0.01×25 000=34 900 元。

现在假定每个消费者都希望分散他们面对的风险，那么他们怎样才能做到这一点呢？答案是把他们的风险“卖给”别人。假定这 1 000 个人互相提供保险，任何人若遭到 10 000 元损失，1 000 个人中每人都向该人捐款 10 元，使受损失者得到报偿，而其他人心理上也得到了安慰。这样每个消费者都把他们所面临的风险分散给了其他人，从而减少了他们所承受的风险。

假定平均每年有 10 人遭受意外损失，那么 1 000 个消费者每人每年要付出 100 元，当然这只是按平均来说，某些年份可能有 12 人遭灾，有些年份可能只有 8 人受灾，那么个人在一年内实际支付 200 元的概率虽然很小，但仍然有这种可能，为了分散这种风险，如大家同意，无论是否有人发生损失，每人每年确定地支付 100 元，这样就可以建立一笔储备基金，将不足 10 人损失的年份中的钱储备起来，以便在超过 10 人受损失的年份中使用，这种互相提供保险的形式实际上就是保险公司的雏形。而保险公司还可以用储备基金投资获利。

假定保险公司规定每保险 1 元应支付保险费 r 元，保险 k 元的保险费为 rk 元。那么 r 应为多少才是合理的呢？

对消费者的财富有两种状态：

状态 1：不发生损失,财富 $C_1=35\ 000-rk$,概率为$(1-p)\%$；

状态 2：发生损失，财富 $C_2=35\ 000-10\ 000+k-rk$ 的概率为 $p\%$。

对保险公司而言，他们必须支付 k 元的概率为 p，什么也

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

不用支付的概率为 $1-p$，无论哪一种状态均可得到保险费 rk，因此保险公司的期望利润为

$$E = rk-pk-(1-p)0=rk-pk$$

如果保险公司按照合同条件不盈也不亏，即按一个公平收费比率提供保险，那么期望利润应为 0，即：

$$rk-pk=0$$

故 $r=p$，即收取保险费用的比率应为损失发生概率 p。

那么消费者应保多少金额呢？对于风险规避者来说，应使 $C_1=C_2$。即：

$$35\,000-rk=25\,000+k-rk$$

得到 $k=10\ 000$ 元，即如果存在公平的保险费用的话，一个保守型消费者总会选择对他的全部风险资产进行保险的。

3.6.2 投资多样化

在风险投资中，投资多样化常常是明智的选择。尤其对保守型投资者来说，将货币分散在不同投资上，会使投资报酬更有保障。下面的例子可以说明这一点。

假设现正出售雨衣公司和太阳镜公司的股票，每股都是 10 元。如果明年是一个多雨的夏季，雨衣公司每份股票就会值 20 元，而太阳镜公司的股票就下跌到 5 元。如果明年是一个晴朗的夏季，太阳镜公司的股票将值 20 元；而雨衣公司的股票只值 5 元，如果你将 100 元全部投资在太阳镜公司，或者全部投入雨衣公司，那么您将有 50%的机会得到 200 元，50%的机会只得到 50 元，期望收入均为 0.5×100+0.5×50=125 元。如果你把 100 元分成两份，分别投入两个公司，那么无论明年天气好坏，你均可稳得 125 元，这样在期望收入不变情形下，将投资风险降低为零。

当然要找到像上述这种完全负相关的投资对象(即一种资

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

产增加时，另一种资产减少)不大容易，大多数投资资产的价值是同方向变动的，但只要这种变动不是完全相关的，那么总可以从多样化投资中获得好处的。

3.6.3 最佳风险投资量

当投资人要在某种风险资产上进行投资时，最佳投资数量应为多少？这个问题可以通过期望效用最大化原理得到。

设某投资人有财富 W 元，他考虑在一种风险资产上投资 x 元，这种投资在好的结果下可以得正报酬率(即资产增加)r_a，在坏的情形下得负的报酬率(即资产减少)r_b，好和坏的发生概率分别为 p 和 $1-p$，那么在好和坏情形下分别有财富 W_a 和 W_b:

$$W_a=(W-x)+x(1+r_a)= W+xr_a$$

$$W_b=(W-x)+x(1+r_b)= W+xr_b$$

投资 x 元后，财富的期望效用为

$$EU(x)=pU(W+xr_a)+(1-p)U(W+xr_b)$$

这里 $U(*)$表示“ * ”的效用。因为：

$$EU'(x)=pU'(W+xr_a)r_a+(1-p)U'(W+xr_b)r_b,$$

$$EU''(x)=pU''(W+xr_a)r^2_a+(1-p)U''(W+xr_b)r^2_b$$

如果投资者是保守型的，那么他的效用曲线是凹性的，它具有性质 $U'(W)>0$，$U''(W)<0$，当 $x=0$ 时：

$$\begin{aligned}EU'(0)&= pU'(W)r_a+(1-p)U'(W)r_b\\&= U'(W)[pr_a+(1-p)r_b]\end{aligned}$$

方括号内表示投资的期望报酬，当投资的期望报酬为负时 $EU'(0)<0$，故当 x 由 0 增加时，期望效用会减少。因此 $x^*=0$ 就是最优投资量，即当投资的期望报酬为负时，保守型投资者将对此类资产不投入 1 分钱；另一方面对投资的期望报酬为正时，那么 $EU'(0)>0$，即当 x 从零增加时，期望效用将增加，因此无论投资者多么保守，他总会愿意在风险资产上作一

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

些投资的。其最优投资量 x^* 可通过期望效用的一阶导数为零求得，即由：

$$EU'(x)=pU'(W+xr_a)r_a+(1-p)U'(W+xr_b)r_b=0$$

可解得 $x = x^*$，又因为 $EU''(x)<0$ 知由上式确定的 x^* 必定使期望效用最大。图 3.6(a)上 $EU'(0)<0$，故最优投资量 $x^*=0$；图 3.6(b)上 $EU'(0)>0$，故最优投资量 $x^*>0$。

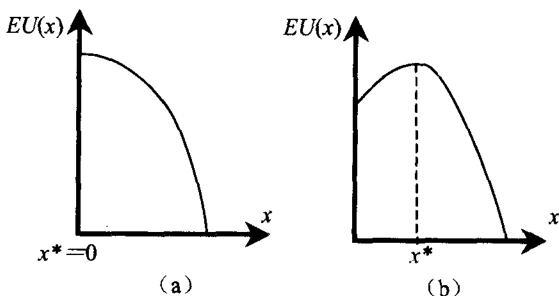


图 3.6　最优投资量

3.7　信息的价值

在风险型决策中，各种自然状态概率的估计准确度对于提高决策的正确性十分重要。我们把对事物发生概率的原来估计称为先验概率，为了提高它的准确度就需要获得新的信息，例如通过调研、查阅资料、专家咨询等对原有估计进行修正。不管哪种途径，均可称为咨询，通过咨询修改后的概率称为后验概率。

咨询要付出咨询费，通过咨询得到的信息如果是有价值的就会带来经济效益。因而应当在咨询费用与它带来的经济效益之间权衡，以判断是否值得咨询。

例 1　我们再来讨论第 3.5 节中例 2。假设由咨询获知，对 *A* 投高标的中标概率为 0.7。试对问题重新分析。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

由新给条件可算得，节点 5 的期望益损值为

$$184\times0.7-5\times0.3=127.3 \text{ 万元。}$$

这样 $A_{高}>A_{低}$，如果投 $A_{高}$可比原来投 $B_{低}$多获利

$$127.3-109=18.3 \text{ 万元}$$

这部分的收益来自购买信息。这就是信息的价值。若咨询酬金不超过 18.3 万元，进行咨询是合算的。

3.7.1 信息的质量

由于咨询机构的水平不同，所提供的信息有不同的准确性，那么我们怎样根据不同质量的信息来修正先验概率呢？

假设某事件有两种自然状态 $S=1$ 和 $S=2$，它们的先验概率分别为 $p(S=1)$及 $p(S=2)=1-p(S=1)$。某咨询机构提供的对自然状态下预报信息为 $C(C=1,\ C=2)$。那么信息 C 的质量体现在下面一组条件概率中：

(1)自然状态为 $S=1$ 时，正确预报 $C=1$ 的概率：

$$p\{C=1\,|\,S=1\} \tag{3.2}$$

(2)自然状态为 $S=2$ 时，正确预报 $C=2$ 的概率：

$$p\{C=2\,|\,S=2\} \tag{3.3}$$

这两个概率越大，说明该机构的预报越准确，咨询水平越高，这组概率可以由该信息机构的历史预报记录获得。同时可得到预报失误概率：

$$p\{C=2\,|\,S=1\}=1-p\{C=1\,|\,S=1\}$$
$$p\{C=1\,|\,S=2\}=1-p\{C=2\,|\,S=2\}$$

3.7.2 后验概率的确定

后验概率可按下述步骤确定：

(1) 计算咨询机构预测水平 $p\{C=1|S=1\}$，$p\{C=2|S=2\}$；

(2) 计算咨询机构预报自然状态为 1($C=1$)及预报自然状

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

态为 2($C=2$)的概率(即全概率)：

$$\begin{aligned}P\{C=1\}=p\{S=1\}p\{C=1|S=1\}+p\{S=2\}p\{C=1|S=2\}\\p\{C=2\}=p\{S=1\}p\{C=2|S=1\}+p\{S=2\}p\{C=2|S=2\}\end{aligned} \quad (3.4)$$

(3)计算自然状态 $S=1$ 且预报 $C=1$ 及 $C=2$ 的概率：

$$\begin{aligned}p\{S=1,\ C=1\}=p\{S=1\}\,p\{C=1\,|\,S=1\},\\p\{S=1,\ C=2\}=p\{S=1\}\,p\{C=2\,|\,S=1\}\end{aligned} \quad (3.5)$$

以及 $S=2$ 且预报 $C=1$，2 的概率为：

$$\begin{aligned}p\{S=2,\ C=1\}=p\{S=2\}\,p\{C=1\,|\,S=2\},\\p\{S=2,\ C=2\}=p\{S=2\}\,p\{C=2\,|\,S=2\}\end{aligned} \quad (3.6)$$

(4)计算后验概率

若预报 $C=1$，自然状态 $S=1$ 的概率为

$$p\{S=1|C=1\}=p\frac{p\{S=1,C=1\}}{p\{C=1\}};$$

若预报 $C=1$，自然状态 $S=2$ 的概率为

$$p\{S=2\,|\,C=1\}\ \frac{p\{S=2,C=1\}}{p\{C=1\}}; \quad (3.7)$$

若预报 $C=2$，自然状态 $S=1$ 的概率为

$$p\{S=1\,|\,C=2\}\ \frac{p\{S=1,C=2\}}{p\{C=2\}};$$

若预报 $C=2$，自然状态 $S=2$ 的概率为

$$p\{S=2\,|\,C=2\}\ \frac{p\{S=2,C=2\}}{p\{C=2\}}。$$

例 2 仍然再来讨论第 3.5 节中的例 2。记中标为 $S=1$，失标为 $S=2$，由题知对 A 工程投高标及投低标中标的先验概率为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$p_{高}\{S=1\}=0.3$，$p_{高}\{S=2\}=0.7$，$p_{低}\{S=1\}=0.5$，$p_{低}\{S=2\}=0.5$。

现请专家进行预测中标与否，预测中标则 $C=1$ 失标则 $C=2$。该专家的预测水平为：

$p\{C=1|S=1\}=0.8$，$p\{C=2|S=2\}=0.6$，

$p\{C=2|S=1\}=0.2$，$p\{C=2|S=2\}=0.4$。

试分别求出 $C=1$，2 时对 A 投高标及投低标的中标后验概率。

解：先估计专家认为投高标会中标或失标的概率：

$p_{高}\{C=1\}$

$$p\{C=1|S=2\}=0.3\times0.8+0.7\times0.4=0.52$$

$$=p_{高}\{S=1\}p\{C=1|S=1\}$$

$$+p_{高}\{S=2\}p_{高}\{C=2\}=0.48$$

同理可估计专家认为投低标会中标或失标的概率：

$p_{低}\{C=1\}=0.6$，$p_{低}\{C=1\}=0.4$。

对投高标计算：

$p_{高}\{S=1, C=1\}=p_{高}\{S=1\}p\{C=1|S=1\}$
$=0.3\times0.8=0.28$，

$p_{高}\{S=1, C=2\}=p_{高}\{S=1\}p\{C=2|S=1\}$
$=0.3\times0.2=0.06$，

$p_{高}\{S=2, C=1\}=0.42$，$p_{高}\{S=2, C=2\}$
$=0.74\times0.4=0.28$。

于是 $A_{高}$的中标的后验概率为

$$p_{高}\{S=1|C=1\}=\frac{p\{S=1,C=2\}}{p\{C=1\}}=\frac{0.24}{0.52}=0.46,$$

同理：$p_{高}\{S=1|C=2\}=0.13$，$p_{高}\{S=2|C=1\}=0.54$，

$p_{高}\{S=2|C=2\}=0.87$。

同理可算出 $A_{低}$的中标后验概率分布为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$p_{低}\{S=1|C=1\}=0.67$，　　$p_{低}\{S=1|C=2\}=0.25$，

$p_{低}\{S=2|C=1\}=0.33$，　　$p_{低}\{S=2|C=2\}=0.75$。

当专家预报 $A_{高}$会中标(即 $C=1$)时，实际 $A_{高}$中标概率为：$p_{高}\{S=1|C=1\}=0.46$，失标概率为：

$$p_{高}\{S=2|C=1\}=0.54,$$

此时按图 3.7 上的节点号得到期望报酬：

当预报 $A_{高}$中标($C=1$)时，$E(5)=184\times0.46-5\times0.54=81.94$，

当预报 $A_{高}$中标($C=2$)时，$E(5)=184\times0.13-5\times0.87=19.44$，

当预报 $A_{低}$中标($C=1$)时，$E(6)=102\times0.67-5\times0.33=66.69$，

当预报 $A_{低}$中标($C=2$)时，$E(6)=102\times0.25-5\times0.75=21.75$。

表 3.10 列出了各种预报情形下对 A 工程投标的期望报酬。

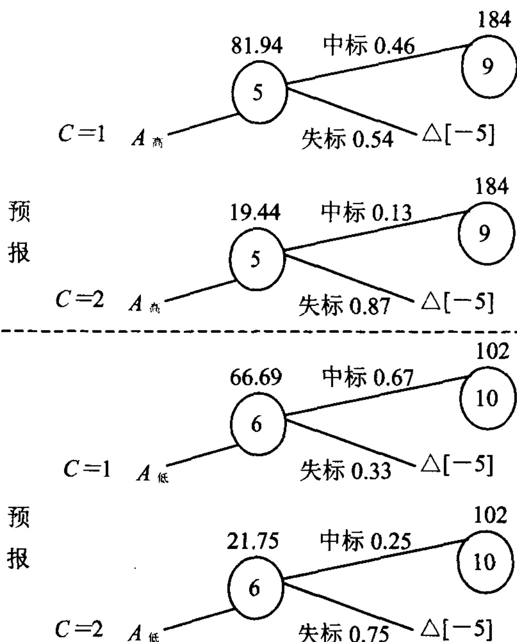


图 3.7　例 2 中各种预报的期望报酬计算

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 3.10 例 2 各种预报下应采取的策略

情形	可能投标	咨询预报	中标先验概率	中标的后验概率	期望报酬(万元)	应采取策略
1	$A_{高}$ $A_{低}$	中标 中标	0.3 0.5	0.46 0.67	81.94 66.69	$A_{高}$
2	$A_{高}$ $A_{低}$	失标 中标	0.3 0.5	0.13 0.67	19.44 66.69	$A_{低}$
3	$A_{高}$ $A_{低}$	失标 失标	0.3 0.5	0.13 0.25	19.44 21.75	$A_{低}$

当预报 $A_{高}$、$A_{低}$均可中标时，可得期望报酬 81.94 万元，比咨询前采取 $A_{高}$的期望报酬 51.2 万元多了 30.74 万元。

当预测 $A_{高}$可中标时，则 $A_{低}$必可中标，若 $A_{低}$失标则 $A_{高}$必失标，因而表 3.11 上三种情形的预报概率分别为

$p(1)=p_{高}\{C=1\}=0.52$，$p(2)=p_{低}\{C=1\}-p_{高}\{C=1\}=0.6-0.52=0.08$，$p(3)=p_{低}\{C=2\}=0.4$。

则通过预测，后验期望报酬为

$E(R)=81.94\times0.52+66.69\times0.08+21.75\times0.4=56.644$ 万元

与先验期望报酬 51.200 万元相比增加报酬

$$56.644-51.200=5.444 \text{ 万元}$$

而咨询费用只需 5000 元，故是值得咨询的。

3.8 完全不确定型决策方法

在风险型决策中虽然不知道哪一种自然状态会发生，但每种自然状态发生的可能性(即概率)是可以预先估计或利用历史资料得到的，如果在实际中连这种估计也难以得到，那么此时的决策问题就是完全不确定型决策问题。对这类问题的决策准则有如下几种。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

3.8.1 乐观准则[最大最大准则(maxmax)]

这种准则的基础是对客观情形总是抱乐观态度，例如三种自然状态 θ_1，θ_2，θ_3 下有四个行动方案 A_1，A_2，A_3，A_4，其益损矩阵为：

	益损值＼状态 方案	θ_1	θ_2	θ_3	max	min
$f(a, \theta)=$	A_1	4	5	6	6	4
	A_2	2	4	9	⑨	2
	A_3	3	6	7	7	3
	A_4	7	5	5	7	⑤

先求出各方案在各种自然状态下的最大益损值(列于 max 列)，然后求出该列的最大值，即

$$\max_{A_i}\{\max_{\theta_j}[f(A_i, \theta_j)]\}=9$$

对应的行动方案为 A_2；有时益损值以越小越好，这时应取最小最小(minmin)准则。

3.8.2 悲观准则[最大最小(maxmin)准则]

这种准则对客观情形抱悲观态度，是一种保守的准则，即在最坏情形下找出一个最好的方案。在上例中为

$$\max_{A_i}\{[\min_{\theta_j} f(A_i, \theta_j)]\}=\max\{4, 2, 3, 5\}=5$$

故应采取方案 4。

3.8.3 乐观系数准则

这种准则的特点是对客观情形的估计既不完全乐观又不完全悲观，采取的是一种折中措施。决策者根据历史经验定出一个乐观系数 $a(0\leqslant a\leqslant 1)$，然后求出各方案的折中益损值 H_i，$i=1, \cdots, m$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$H_i = a\max_j\{a_{ij}\} + (1-a)\min_j\{a_{ij}\} \quad i=1,\cdots,m$$

这里 m 是益损矩阵的行数(即方案数)；a_{ij} 为益损矩阵的元素。再求

$$H = \max_i H_i$$

H 所对应的方案即为最优方案。

例如在上例中若取 $a=0.8$，那么

$H_1=0.8\times6+0.2\times4=5.6$，　$H_2=0.8\times9+0.2\times2=7.6$，

$H_3=0.8\times7+0.2\times3=6.2$，　$H_4=0.8\times7+0.2\times5=6.6$。

故 $H=\max\{5.6，7.6，6.2，6.6\}=7.6$，最优方案为 A_2。

3.8.4　等可能准则

这种准则是对所有自然状态一视同仁，把各方案在不同自然状态下的益损值平均，然后比较，即计算

$$M = \max_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \quad i=1,\cdots,m$$

如上例中 $M_1=5$，$M_2=3$，$M_3=\frac{16}{3}$，$M_4=\frac{17}{3}$。则方案 4 为最优方案。

3.8.5　后悔值准则

决策者制定策略后，若情况未能符合理想，必将有后悔感觉。后悔值准则就是要使后悔程度尽量地小，其做法如下：

(1) 首先将在一种自然状态下，各方案的最大益损值定为该状态下的理想目标，在矩阵中用圆圈圈出，并将该状态下其他益损值与目标值之差称为后悔值。这样就构成了一个后悔矩阵，上例中

(2) 求出各个行动方案的最大后悔值 R_i，在后悔矩阵上圈出。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

	θ_1	θ_2	θ_3
A_1	4	5	6
A_2	2	4	⑨
A_3	3	⑥	7
A_4	⑦	5	5

益损矩阵

	θ_1	θ_2	θ_3
A_1	③	1	3
A_2	⑤	2	0
A_3	④	0	2
A_4	0	1	④

后悔矩阵

(3) 求出这些最大后悔值 R_i 中的最小值 $R=\min_i R_i=3$ 相应的方案就是最优方案。这里最优方案为方案 1。

由上面讨论可知，同一个决策问题，应用不同的准则可以得到不同的最优方案，准则的选择取决于决策者对各种自然状态所抱的态度。只有增加问题的确定性，才能使作出的决策比较准确。

例 1 分别应用上述准则确定第 3.5 节中例 2 的投标策略。假定自然状态的概率不能确定，乐观系数为 $a=0.6$

解：表 3.11、表 3.12 列出了各种结果。

表 3.11 例 2 在各种准则下的最优方案

益损矩阵 \ 自然状态 \ 方案	自然状态				乐观准则 max	悲观准则 min	乐观系数准则 $a=0.6$	等可能准则 M_i
	中标			失标				
	优	中	赔					
$A_{高}$	500	100	−80	−5	500	−80	268	128.75
$A_{低}$	400	70	−100	−5	400	−100	200	91.25
不投	0	0	0	0	0	[0]	0	0
$B_{高}$	700	200	−100	−10	[700]	−100	[380]	[197.5]
$B_{低}$	600	100	−120	−10	600	−120	212	142.5

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 3.12 例 2 在后悔值准则下的最优方案

状态 / 后悔矩阵 / 方案	中标			失标	后悔值
	优	中	赔		
$A_{高}$	200	100	80	5	200
$A_{低}$	300	130	100	5	300
不投	700	200	0	0	700
$B_{高}$	0	0	100	10	100
$B_{低}$	100	100	120	10	120

得到的结论是：

(1)乐观准则下应选 $B_{高}$；

(2)悲观准则下应不投标；

(3)乐观系数 $a=0.6$ 下应选 $B_{高}$；

(4)等可能准则下应选 $B_{高}$；

(5)后悔值准则下应选 $B_{高}$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第4章　证券投资概论

4.1　股票投资要素

股票是一种最常见的证券，股票投资的主要目的是赚取投资报酬。但股票投资是一种风险投资，在获得报酬的同时隐含着风险。投资的报酬是投资者甘冒风险的一种代价。报酬和风险是股票投资的两个要素，它们互相依存，互相影响，构成了股票市场特有的魅力。

在正常情形下报酬与风险是同一趋势的。高报酬必然隐含高风险，高风险带给投资者高报酬，当然这种高报酬是指平均意义上而言，对某个投资者而言，很可能因投资失败不仅无报酬可言，而且会亏损赔本。相同地，低报酬必然低风险，低风险只会带来低报酬。如果投资报酬与风险不是对等的，那么这种投资绝不能正常、普遍、持久下去。例如高风险的投资者若只能获得低报酬，那么人们必然会纷纷撤出这种不划算的投资。相反的对低风险高报酬的投资，投资者必然会趋之若鹜，而一窝蜂投资的结果，报酬率必然下降，最后这两种不对等的投资一定会调整到对等状态。

.11　理性的投资选择

一个理智的投资人应是规避风险与追求报酬的投资人。图4.1中 A、B、C 是三个可供选择的投资机会，理性投资人应选择 A 点。当只有 B、C 两点可供选择时，风险的规避者即保守型投资人会选择 B 点，相反的风险的追求者即冒险型投资人会选择风险较高，报酬也较高的 C 点。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

投资者的效用是财富的函数，投资者财富的增减受到其投资报酬与风险的影响，从而也影响投资者的总效用。报酬与效用是正相关而风险与效用是负相关的。其效用大小与各人主观偏好有关。因此，投资方案的选择不仅取决于报酬与风险的大小，也取决于各个投资者的效用函数。

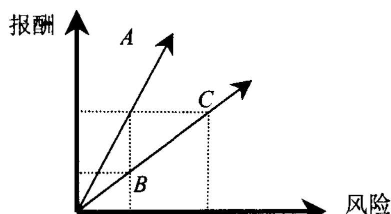


图 4.1 投资机会选择

为了取得报酬、风险与效用间的均衡，首先在报酬与风险平面上作出一组效用无差异曲线，然后作出表示报酬与风险替代关系的“风险价格线”。一组无差异曲线与相同斜率的一组风险价格线的相切点可以连成一条射线(图 4.2 上 *ECF* 射线)。在这条射线上的点代表该投资者的均衡投资。

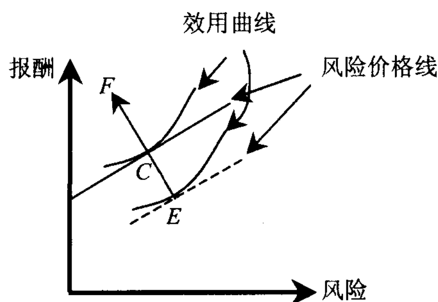


图 4.2 投资者的均衡状态

股票作为一种投资工具，具有以下基本特征：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(1) 股票是一种无返回期的投资工具，除非公司破产清偿或解散，股票只能买卖，不能还本。

(2) 股票是一种高风险投资工具，其价格受公司经营及相关的政治经济形势直接影响而频繁剧烈波动。

(3) 股票是一种潜在的高收益工具，其收益由公司的经营和发展带来的资本增值所决定，而不受其面值和事先的规定所限制。

4.2 报酬与风险的量化方法

股票投资的报酬来自于发行公司所配发的股利以及在买卖股票过程中所赚取的差价利益两部分。公司配发的股利又可分为现金股利与股票股利两种。现金股利是公司以现金形态配发给股东，称为除息。股票股利是一种无偿配股。发放股票股利的行为称为除权。

4.2.1 股票报酬率计算方法

前面已经提到，所谓投资报酬率是指投资收益占投资成本的百分比。股票投资报酬率为 R:

$$R=\frac{\text{股利}+\text{差价利益}}{\text{买进价格}}\times 100\%$$

根据投资期数，其报酬率可以分为单期报酬率，多期报酬率和平均报酬率，由于未来报酬率是随机变量，故只能按其概率分布求出期望报酬率。下面分别讨论这几种报酬率的计算方法。

(1) 单期报酬率

单期报酬率是指某一投资期间(若一周，一月，一季，一年)内，只进行一次买卖所产生的报酬率，设此报酬率为 R_t，期初

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

买进价格为 P_t，期末卖出价格为 P_{t+1}，第 t 期内的现金股利为 D_t，那么

$$R_t = \frac{D_t + (P_{t+1} - P_t)}{P_t} = \frac{D_t + P_{t+1}}{P_t} - 1 \tag{4.1}$$

除现金股利外，计算投资报酬率还应考虑无偿配股与有偿认股的情形，假设无偿配股率为 S_1，有偿认股率为 S_2，有偿认股价格为 A_{t+1}，那么常见的几种股票报酬率计算公式为

1) 无现金股利，有无偿配股：

$$R_t = \frac{P_{t+1}(1+S_1)}{P_t} - 1 \tag{4.2}$$

2) 无现金股利与无偿配股，但有有偿认股：

$$R_t = \frac{P_{t+1}(1+S_2)}{(P_t + A_{t+1}S_2)} - 1 \tag{4.3}$$

3) 无现金股利，但同时有无偿配股及有偿认股：

$$R_t = \frac{P_{t+1}(1+S_1+S_2)}{(P_t + A_{t+1}S_2)} - 1 \tag{4.4}$$

4) 无现金股利，但先无偿配股再有偿认股：

$$R_t = \frac{P_{t+1}(1+S_1)(1+S_2)}{P_t + A_{t+1}S_2(1+S_1)} - 1 \tag{4.5}$$

5) 先有现金股利，后同时无偿配股与有偿认股：

$$R_t = \frac{D_t + P_{t+1}(1+S_1+S_2)}{P_t + A_{t+1}S_2} - 1 \tag{4.6}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

6) 先有现金股利，其次无偿配股，最后有偿认股：

$$R_t = \frac{D_t + P_{t+1}(1+S_1)(1+S_2)}{P_t + A_{t+1}S_2(1+S_1)} - 1 \tag{4.7}$$

(2) 多期报酬率

这是指连续多个期数的总报酬率，等于连续数个单期报酬率的总和。

(3) 平均报酬率

这是指数个单期报酬率的算术平均或几何平均报酬率，设期数为 n，第 t 期报酬率为 R_t，那么

算术平均报酬率为：$R = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{n}$ (4.8)

几何平均报酬率为：$R = \prod_{t=1}^{n}(1+R_t)^{\frac{1}{n}} - 1$ (4.9)

(4) 投资组合报酬率

设单一股票报酬率为 R_i

$$R_i = \frac{D_{it} + P_{it+1}}{P_{it}} - 1$$

现有 $i=1$，…，n 种股票的投资组合，各股票所占比重为 W_i 且 $\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$，那么该投资组合的报酬率 R 为

$$R = \sum_{i=1}^{n} W_i R_i \tag{4.10}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(5) 期望报酬率

由于未来报酬率是随机变量，故实际上我们只能求出报酬率的期望值，称为期望报酬率，第 i 种单一股票的期望报酬率为

$$E(R_i)=\sum_{j=1}^{N}R_{ij}P_{ij}\qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{4.11}$$

其中 P_{ij} 为第 j 种报酬率的概率。

投资组合的期望报酬率为

$$E(R)=E(\sum_{i=1}^{n}W_i R_i)=\sum_{i=1}^{n}W_i E(R_i) \tag{4.12}$$

其中 n 为股票种类；N 为可能报酬率个数；P_{ij} 为第 i 种股票出现第 j 种报酬 R_{ij} 的概率。

.22 股票投资的风险测度

股票投资的报酬率是不确定的，这种不确定性可能导致投资得不到预期收益甚至亏本，即这种不确定性将会带来收益的风险，风险越大，风险补偿越高，因此必须对风险大小进行度量。风险本质上是由报酬率的分散造成的，如果某个投资只有一个可能报酬率，那么它就没有风险了。统计学中为我们提供了下面几种衡量风险的方法。

(1) 方差与标准差

设第 i 种股票的可能报酬率为 R_{ij}，相应概率为 P_{ij}，期望报酬率为 $E(R_i)$，$(j=1,\ \cdots,\ N)$，那么报酬率的方差为

$$\sigma^2_i=\sum_{j=1}^{N}[R_{ij}-E(R_i)]^2 P_{ij} \tag{4.13}$$

例如某股票的报酬率及其不确定性状况为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

报酬率(%)	11	8	9	10	12	17	6	2	.	1
概率	015	01	02	02	01	01	005	003	005	002

那么其期望报酬率 R 和方差 σ^2、标准差 σ 分别为

$$R = 11\%\times0.15+8\%\times0.1+9\%\times0.2+10\%\times0.2+12\%\times0.1 +17\%\times0.1+6\%\times0.05+2\%\times0.03+4\%\times0.05 +1\%\times0.02=9.73\%$$

$$\sigma^2=(0.097\,3-0.11)^2\times0.15+(0.097\,3-0.08)^2\times0.1 +(0.097\,3-0.09)^2\times0.2+(0.097\,3-0.1)^2\times0.2 +(0.097\,3-0.12)^2\times0.1+(0.097\,3-0.17)^2\times0.1 +(0.097\,3-0.06)^2\times0.05+(0.097\,3-0.02)^2\times0.03 +(0.097\,3-0.04)^2\times0.05+(0.097\,3-0.01)^2\times0.02 = 0.127\%$$

$$\sigma=3.56\%$$

(2) 方差系数

用方差或标准差所衡量的风险属于绝对性风险。为了比较不同投资方案风险大小，常常需用相对风险—方差系数衡量。方差系数 CV 为

$$CV=\frac{标准差}{期望报酬率} \tag{4.14}$$

例如上例中 $CV=\dfrac{3.56}{9.73}=0.366=36.6\%$。方差系数就是图 4.1 上当横坐标取为 σ，纵坐标取为期望报酬率时的斜率。对方差系数相同的 B 点与 C 点何者较佳，则由投资者主观偏好决定。

当同时投资于无风险和有风险证券的投资组合时，设 $E(R_i)$ 表示有风险的证券的期望报酬率，r_f 为无风险证券的报酬率，

那么此时的方差系数为 $\dfrac{\sigma_i}{E(R_i)-r_f}$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(3) 半方差与半标准差

以标准差衡量风险时，只要实际值与预期值有差距，均视为风险，但实际报酬率若高于期望报酬率是属于有利情形，如果只考虑不利情形则可用半方差 $S\sigma^2$ 或半标准差 $S\sigma$ 衡量，此时只考虑低于平均报酬率的实际报酬率 R'_{ij}

$$S\sigma^2_i=\sum_{j=1}^{n'}[R'_{ij}-E(R_i)]^2\,p_{ij} \tag{4.15}$$

$$S\sigma_i=(S\sigma^2_i)^{1/2} \tag{4.16}$$

例如上例中

$$S\sigma^2=0.061\%,\quad S\sigma=2.46\%$$

由于半方差与半标准差及方差与标准差有高度替代性，故实际中仍常以方差与标准差为衡量风险的主要手段。

(4) β—系数

在证券市场上各种股票互相关联，它们或多或少受市场总体影响。市场的变化能充分反映各股票的共同变化趋势。图 4.3 是由历史资料得到的第 i 种股票的各月收益率 R_i 与市场总体收益率 R_m 的散点图。通过散点图的直线是个股与市场关联关系的最适估计。我们称该线为第 i 种股票的特征线，其在任一月（t 月）的收益率 $R_i(R_{it})$ 与市场收益率 $R_m(R_{mt})$ 的关系为

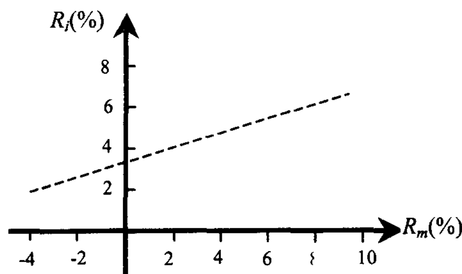


图 4.3　个股特征线

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$R_i=\alpha_i+\beta_i R_m+\varepsilon_i \tag{4.17}$$

用回归方法可求得 α_i，β_i。得到特征线方程

$$\hat{R}_i=\alpha_i+\beta_i R_m$$

$\hat{R}_i$ 是对 R_i 的最好估计。β_i 则反映了 R_i 的变化与 R_m 变化的依赖程度。当 $\beta_i>0$ 时表示股票的变动方向与市场方向一致。$\beta_i<0$ 则表示两者变动方向相反。$|\beta_i|$越小，股票对市场越不敏感，其系统风险将低于市场风险，故称为保守型股票；$|\beta_i|>1$ 的股票其系统风险高于市场风险，往往可获得更高的平均收益故称为进取型股票。

4.3 投资组合与效率前缘

任何一个投资计划都应把资金分散到两种以上投资对象上，以降低投资风险。这种做法称为投资组合。它包含持有期多元化以及证券种类多元化。

投资组合的目标是使投资者的期望效用最大，在选择投资组合时既要考虑各个股票的特性以及它们之间的相互关联，又要考虑投资者的特征及投资目的。在选择投资对象时应按照首先确定投资产业，然后确定投资公司，最后确定各公司股票比例的次序进行。

4.3.1 股票间相互关联性的测定

在股票市场中，每种股票除了有其自身的变动特征外，一些股票之间还有一定的联动性，即一种股票的上涨可能引起另一种股票的上涨或下跌，因此有必要了解两种股票相互关联的程度。这种关联程度可用统计学中的相关系数给出。设第 i 种

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

及第 j 种股票在过去若干年(m 年)中的收益率分别为

$$R_{i1} \quad R_{i2} \quad \cdots\cdots \quad R_{im}$$
$$R_{j1} \quad R_{j2} \quad \cdots\cdots \quad R_{jm}$$

它们的平均收益率及方差分别为 $\hat{R}_i$、$\hat{R}_j$ 及 σ_i^2、σ_j^2，那么相关系数 ρ_{ij} 为

$$\rho_{ij}=\frac{E[R_i-E(R_i)][R_j-E(R_j)]}{\sqrt{\sigma_i^2}\sqrt{\sigma_j^2}}$$

$$=(\frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\times\frac{1}{m})\sum_{k=1}^{m}(R_{ik}-\hat{R}_i)(R_{jk}-\hat{R}_j) \tag{4.18}$$

$$Cov(R_i,R_j)=\sigma_{ij}=E[R_i-E(R_i)][R_j-E(R_j)]$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(R_{ik}-\hat{R}_i)(R_{jk}-\hat{R}_j) \tag{4.19}$$

σ_{ij} 称为 R_i 与 R_j 的协方差，那么

$$\rho_{ij}=\frac{Cov(R_i,R_i)}{\sigma_i\sigma_j} \tag{4.20}$$

当 $\rho_{ij}=1$ 时，称 i 股票与 j 股票是完全正相关的，即 i 的上涨(或下跌)完全由 j 股票的上涨(或下跌)决定。$\rho_{ij}=-1$ 时则 i 股票与 j 股票是完全负相关的即 i 的上涨(下跌)是由 j 的下跌(上涨)决定的。当 $\rho_{ij}=0$ 时表示两种股票毫无联系。当 $0<\rho_{ij}<1$ 时，两种股票不完全正相关，此时两种股票价格变动方向大致相同。当 $-1<\rho_{ij}<0$ 时两种股票为不完全负相关，此时两种股票价格变动方向大致相反。

4.3.2 马克维兹(Harry M. Markowitz)投资组合分析

1952 年马克维兹应用数量化模式探讨多元化投资的效益，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

并寻求效率投资组合，得到效率前缘，从而可确定投资者的最适投资组合。

(1) 假设条件

马克维兹投资组合分析主要基于以下各项假设条件：

1) 投资者的效用为财富(报酬率)的函数，投资者对报酬率的边际效用递减，故效用无差异曲线为凹状；

2) 投资报酬率呈正态分布；

3) 投资风险以报酬率的方差或标准差表示；

4) 投资效用期望值是报酬率与风险的函数，投资者希望其效用期望值最大。

(2) 投资组合的报酬率与风险

设有 n 种投资，它们的各自的期望报酬率为 μ_i，方差为 σ_i，投资比重为 ω_i，$i=1$，…，n。其平均期望报酬率为 μ_p，则

$$\mu_p=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\mu_i,\quad \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$$

n 种投资的期望报酬率的方差 σ_p^2 为

$$\begin{aligned}\sigma_p^2&=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\end{aligned}\tag{4.21}$$

标准差为

$$\sigma_p=[\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}]^{\frac{1}{2}}\tag{4.22}$$

在考虑多元化投资时，我们将各种可能投资比例得到的投资组合的报酬率与风险集合称为投资集合，利用投资机会集合

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的概念可以分析各种证券报酬率彼此相关程度并寻求最佳效率投资组合。

(3) 两种证券投资组合分析

我们从最简单的两种证券投资组合着手分析。设市场上只有 A、B 两种证券，其期望报酬率分别为 μ_A，μ_B，标准差为 σ_A，σ_B 均大于零。其投资比例为 ω_A，ω_B 且 $\omega_A+\omega_B=1$，则此投资组合的期望报酬率 μ_p 及标准差 σ_p 为

$$\mu_p=\omega_A\mu_A+(1-\omega_A)\mu_B \tag{4.23}$$

$$\sigma_p=[\omega_A^2\sigma_A^2+(1-\omega_A)^2\sigma_B^2+2\omega_A(1-\omega_A)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B]^{\frac{1}{2}} \tag{4.24}$$

下面我们对不同的相关系数分析 A、B 两种证券的投资机会集合。

1) $\rho_{AB}=1$，此时证券 A，B 完全正相关，有

$$\mu_p=\omega_A\mu_A+(1-\omega_A)\mu_B$$

$$\sigma=|\omega_A\sigma_A+(1-\omega_A)\sigma_B|$$

当 $0\leqslant\omega_A\leqslant1$ 时

$$\frac{\mathrm{d}\mu_p}{\mathrm{d}\sigma_p}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\mu_p}{\mathrm{d}\omega_A}}{\dfrac{\mathrm{d}\sigma_p}{\mathrm{d}\omega_A}}=\frac{\mu_A-\mu_B}{\sigma_A-\sigma_B}=C \tag{4.25}$$

故机会投资集合为图 4.4 上的直线 AB 的实线部分其斜率为 $\dfrac{\mu_A-\mu_B}{\sigma_A-\sigma_B}$。当 $\omega_A<0$ 或 $\omega_B<0$ 时，有意义的机会投资集合落在 AB 的虚线部分。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

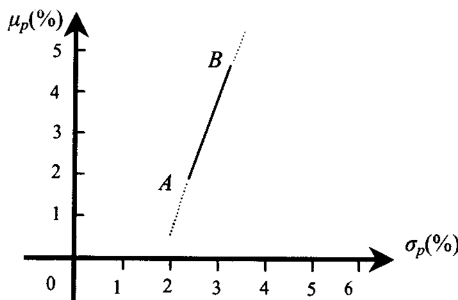


图 4.4 $\rho=1$ 时两种证券投资组合

由于两种证券的报酬率与风险呈现同一方向、同一程度的变动，因此只能通过两种证券的适当比例搭配形成新的投资使它的收益和风险在 A、B 之间，但无论如何组合均不能获得风险比其中一种证券小而收益比该种证券大的组合。

2) $\rho_{AB}=-1$(完全负相关)，此时的投资机会集合为

$$\mu_p=\omega_A\mu_A+(1-\omega_A)\mu_B,\quad \sigma_p=|\,\omega_A\sigma_A-(1-\omega_A)\sigma_B\,|$$

适当调整投资比例，可使 σ_p 下降，特别当 $\dfrac{\omega_A}{1-\omega_A}=\dfrac{\sigma_B}{\sigma_A}$ 时可使 $\sigma_p=0$，此点为 C。此时投资机会集合为 CB 与 CA 两线段(图 4.5)，其斜率分别为 $\dfrac{\mu_A-\mu_B}{-(\sigma_B+\sigma_A)}$ 及 $\dfrac{\mu_A-\mu_B}{\sigma_A+\sigma_B}$。$C$ 点的风险为零，但其报酬率高于 A。由此可知在完全负相关的投资组合中，可通过多元化投资原则降低风险，提高收益。当 $\mu_B>\mu_A$ 时，CB 位于 CA 上方，故 CB 是有效率的投资组合。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

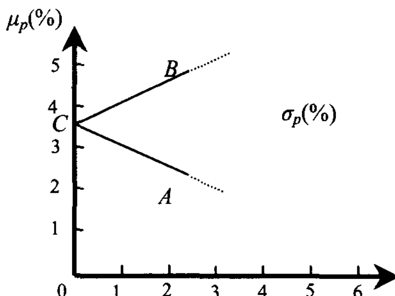


图 4.5 $\rho=-1$ 时两种证券的投资组合

3) $-1<\rho_{AB}<+1$，将 $\rho_{AB}=+1$、-1 同时画在图上(图 4.6)得到三角形 *ABC*，而当相关系数介于−1 与+1 之间时，投资组合的机会集合必落在三角形内。给出一个$-1<\rho_{AB}<+1$ 的值，即可得到一条相应的投资机会集合 *ASB*。当 ρ 增加时，曲线右移；当 ρ 减少时，曲线左移，在 *ASB* 曲线上(*S* 为最左点)，*SB* 位于 *SA* 上方，故在相同风险下 *SB* 上的点具有较高的收益，因而其每一点均是一个有效率的投资组合，*SB* 称为效率前缘；而 *SA* 则是缺乏效率的前缘曲线。

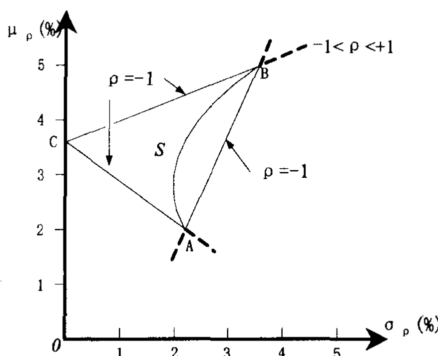


图 4.6 $-1<\rho<+1$ 时两种证券的投资组合

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(4) 效率前缘的确定

前面已经提到，所谓有效前缘是指在多种投资组合下，以期望报酬率 μ_p 为纵坐标，以风险 σ_p 为横坐标图上的一条曲线，在这条曲线上的任一点都代表一个有效率的投资组合，即为在某一风险下期望报酬率最高的投资组合，或在某一期望报酬率下，风险最小的投资组合。投资者应在效率前缘上选择投资组合，为此需讨论效率前缘的确定方法。

对于两种有风险的证券的投资组合，可用图解法求出其效率前缘。

例 1 设有 A、B 两种证券可供选择投资，表 4.1 上列出了它们在三种可能自然状态下的报酬率，试确定它们的最优投资组合。

由计算得

$$\mu_A = E(R_A) = 0.25\times0.1 + 0.50\times0.20 + 0.25\times0.30 = 0.20$$

$$\sigma_A^2 = 0.25(0.10-0.20)^2 + 0.50(0.20-0.20)^2 + 0.25(0.30-0.20)^2 = 0.005$$

表 .1　例 1 中各种自然状态下的报酬率

自然状态	1	2	3
概　率	025	050	025
A 报酬率	010	020	030
B 报酬率	025	015	009

表 .2　例 1 中各种投资组合的期望报酬率与方差

ω_A	0	025	050	075	10
ω_B	10	075	050	025	6
μ_p	016	017	018	019	020
σ_p	0057	0025 9	0008 7	0039 0	0070 7

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

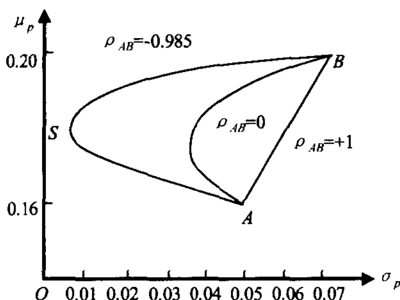


图 4.7　效率前缘曲线

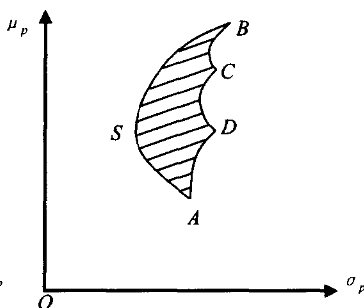


图 4.8　多种证券投资组合的效率前缘

同理可得

$$\mu_B=0.16,\quad \sigma_B^2=0.0033,\quad \sigma_{AB}=-0.004,$$

$$\rho_{AB}=\frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A\sigma_B}=-0.9857$$

对不同的投资组合 ω_A,ω_B，计算期望报酬率 μ_p 及方差 σ_p(表 4.2)，将它们画在 μ_p—σ_p 坐标图上，曲线 ASB 即为前缘曲线，而 BS 为效率前缘。

投资机会集合为一个区域，如图 4.8 上的 $ASBCD$ 所围的区域，其中最接近纵轴的凸点 S 点为风险最小的投资组合，而曲线 SB 为投资组合的效率前缘。

对多元化投资组合，马克维兹用二次规划方法确定投资组合中的 ω 值，其数学模型为

$$\max \quad z=(1-\lambda)\mu_p-\lambda\sigma_p^2$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\text{s.t.}\quad \mu_p=\sum_{j=1}^{n}\omega_i\,\mu_j$$

$$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij} \tag{4.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1 \qquad \omega_i\geqslant 0 \quad i=1,\cdots,n$$

式中：$\lambda\in[0,\ 1]$，λ 增大，σ_p^2的重要性增加，此时目标函数主要用于使σ_p^2取极小值。λ越小，μ_p的重要性增加，其目标主要使μ_p取极大值，对于不同的λ可求出不同组合系数ω_i下相应的σ_p与μ_p，从而可得到效率前缘。上述问题可用标准化程序求解。

(5) 最适投资组合的确定

得到效率前缘后，投资者还必须在其上确定一个最适投资点。该点的确定与投资者对风险的态度有关。在同一张图上作出投资者的效用期望值无差异曲线，对于风险规避型(即保守型)投资者来说，随着风险的增加将会要求更多的报酬率补偿，因此效用期望值无差异曲线是一组凹向纵坐标轴的曲线，其中有一条与效率前缘相切于A点。A点就是最适投资组合(图 4.9)。

不同的投资人有不同的无差异曲线。较保守的投资人由于要求的风险补偿更多，故而无差异曲线较陡，与效率前缘的切点A较低；相反较积极的投资人的无差异曲线较平坦，相应的切点B的位置也较高。由此可知最适投资组合点由两步确定：①选择投资组合中应有的股票，并由此确定投资组合效率前缘，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

此选择与投资人偏好无关；②按照投资者的偏好选择各股票的最佳组合比例。

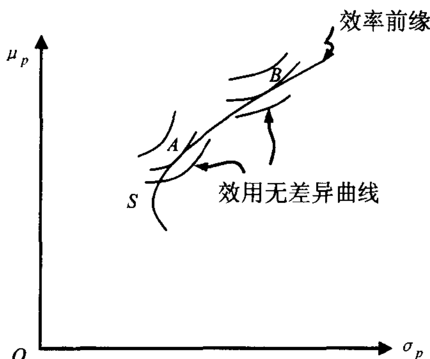


图 4.9　最适合投资组合的确定

4.3.3　降低投资组合风险的措施

我们知道适当选择投资组合将会使风险下降，根据方差公式

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{4.27}$$

马氏认为σ_p^2的下降主要是因为$\rho_{ij}<1$所致。法玛(Fugene F.Fama)将上式改写，令

$$\omega_i = 1/n,\quad \bar{\sigma}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2/n,$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1(j<i)}^{n}\frac{2\sigma_{ij}}{n(n-1)}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

式(4.27)可写成

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\overline{\sigma}_i^2 + \frac{n-1}{n}\overline{\sigma}_i^2 \tag{4.28}$$

故当 n 增大时，式中第一项将趋于零，使 σ_p^2 下降，故法玛认为只要证券种类足够多，风险就会下降。综合上述分析，在投资组合中应使①各证券报酬率的相关系数尽量小；②组合中的证券数目足够多，就可达到将风险尽量减小的目的。

4.4　资本资产定价模式

前一节我们研究了应用投资组合分析方法来作投资决策。本节将讨论投资组合的期望报酬率与风险的关系，进而讨论证券市场中证券价格理论——资本资产定价模式。

资本资产定价模式的基本假设是投资者的行为可用期望报酬率与方差准则描述，效用函数是凹性的，报酬率分布为正态分布。其他还假设所有投资者对报酬与风险的看法均相同，没有一个投资者可左右市场，不记交易成本与所得税以及所有投资者均可按某一利率进行借贷款而不会影响此利率，并在投资组合中加入无风险债券投资。

4.4.1　股票市场的均衡

(1) 单一股票投资组合

设 W 为投资者总财富，r 与 σ 为投资于这宗股票的报酬率与标准差，E_r 为其期望报酬率，r_f 为无风险利率。设该投资人以一个比例 x 投资于无风险债券而将$(1-x)$部分投资于股票，那么这种新的投资组合的报酬率为

$$r_p = xWr_f + (1-x)Wr \tag{4.29}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

投资组合的期望报酬率 E_{rp} 及标准差 σ_p 为

$$Er_p = xWr_f + (1-x)WEr \quad 对 \tag{4.30}$$

$$\sigma_p = (1-x)W\sigma \tag{4.31}$$

从式(4.31)中解出$(1-x)W=\dfrac{\sigma_p}{\sigma}$，$xW=W-\dfrac{\sigma_p}{\sigma}$，代入式(4.30)，

得到

$$Er_p = r_f W + \left(\frac{Er - r_f}{\sigma}\right)\sigma_p \tag{4.32}$$

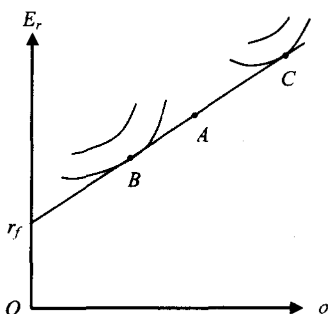


图 4.10　单一股票投资组合的转换线

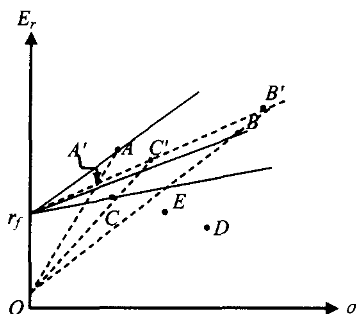


图 4.11　单一股票投资组合的选择及市场均衡

由此可见，该投资组合的投资机会集合为一直线，其斜率为 $\dfrac{Er-r_f}{\sigma}$，因 $Er>r_f$，故该直线的斜率是正的，此即为投资者对于单位风险所要求的价格或补偿(也称贴水)。该直线也称转换线(图 4.10)，它也就是该投资组合的效率前缘。它与投资人的(效用期望值)无差异曲线的切点，即为最佳投资点。它是债券与股票的按某个比例的组合。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

前面已经指出，在确定最佳投资点时，首先要选择投资组合中的股票，假设有 A、B、C、D、E 五种股票(图 4.11)，显然投资人不会选择 D、E 因为股票 A 的期望报酬率比它们高，而风险比它们都低。现在考虑 A、B、C 三种股票，分别作出它们与无风险债券组合的转换线。A 股票位于最高转换线上，因此任何一个投资人均会选择 A 股票，以达到较高的效用。由于所有投资人都会选择同样的股票 A，A 股票的价格就会上涨；相反的由于对 B、C 股票的需求下降，它们的价格也下降。假设 A 的价格以 g 的比率增加，使其新市场价格为原来市场价格的 $(1+g)$倍，则其新报酬率 $Er'_A=\dfrac{Er_A}{1+g}$，新标准差 $\sigma'_A=\dfrac{\sigma_A}{1+g}$，即其期望报酬率与标准差以 g 的速率下跌，即沿图 4.11 上的 OA 线向 0 点移动，B 点及 C 点的变化则恰好相反。这种调整不断进行，直到三种股票的转换线合一，如图 4.11 上 A'、B'、C'所示。这时这三种股票均能提供使投资人效用极大化的机会，从而达到了股票市场的均衡点。

(2) 多种股票投资组合

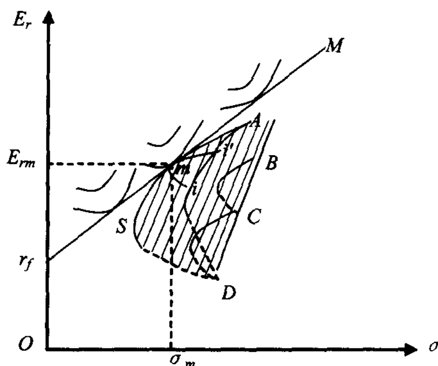


图 .12　多种股票投资组合及与债券之组合

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

假设股票市场有 A、B、C、D 四种股票。图 4.12 中阴影部分表示两种以上股票的投资组合的期望报酬率与标准差组合。由全部四种股票形成的效率前缘位于阴影区之最左方。现假设投资人可以以利率 r_f 进行借贷，过(0，r_f)点作效率前缘的切线 $r_f M$，切点为 m，那么 $r_f M$ 就是这四种股票的投资组合与利率为 r_f 的无风险债券组合下的最高市场转换线。此时这四种股票的投资组合可用以 m 点表示的一种新的股票 m 替代。若投资人的无差异曲线与直线 $r_f M$ 相切于 m 点，那么它将把全部资金投资于股票组合 m。若切点在 r_f 与 m 之间，投资人将持有部分股票与部分无风险债券，若切点在 m 与 M 之间，投资人将会借款(发行债券)投资于 m。以上分析中投资人的偏好只影响无差异曲线切点位置，与 m 点的确定无关。这样投资过程可分为两个阶段：①找出最佳投资组合中各股票所占比例，即确定 m 点，这一过程与投资人偏好无关；②确定无风险债券与最佳股票投资组合的投资比重，这一过程与投资人的偏好有关。这就是所谓的区隔理论。

由此可知，在一个完全市场，所有投资人的股票投资组合中均包含相同的股票，因此若某一股票未包括在投资组合中，那么就没有人会持有它，而它的价格会下降，进而其报酬率会提高，直到能吸引人而进入投资组合，故在均衡时，所有投资人的股票(风险性资产)投资组合都将包括所有风险性资产。

4.4.2 资本资产定价模式—个别股票风险与报酬率的关系

设投资人有财富 1，根据区隔理论所有投资人均将持有同样的股票投资组合 m(图 4.12)，现创造一种由最适投资组合 m 与某一风险性资产 i(即与第 i 种股票所组成的投资组合)，x_i 为投资于 i 股票部分，r_p 为此新投资组合的报酬率，那么

$$r_p = x_i r_i + (1 - x_i) r_m$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中 r_i 及 r_m 分别为 i 股票及投资组合 m 的报酬率，于是

$$Er_p = x_i Er_i + (1-x_i) Er_m \tag{4.33}$$

$$\sigma_p^2 = x_i^2\ \sigma_i^2 + (1-x_i)^2 \sigma_m^2 + 2x_i(1-x_i)\,\sigma_{im} \tag{4.34}$$

式中 σ_{im} 为 i 股票与投资组合 m 的协方差。不断改变 x_i 值可得到图 4.12 上的 $i\ i'$曲线，该曲线不可能超出最佳投资组合线 DSA，并且当 $x_i=0$ 时，即为 m 点，因而 $i\ i'$曲线在 m 点(即 $x=0$ 点)的斜率 $\left.\dfrac{\partial Er_p}{\partial \sigma_p}\right|_{xi=0}$ 就是 $r_f M$ 的斜率：$\dfrac{Er_m - r_f}{\sigma_m}$。同时由式(4.33)、(4.34)可得

$$\frac{\partial Er_p}{\partial x_i} = Er_i - Er_m$$

$$\frac{\partial Er_p}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sigma_p}[2x_i\sigma_i^2 - 2(1-x_i)\,\sigma_m^2 + 2\sigma_{im} - 4\,x_i\sigma_{im}]$$

当 $x_i=0$ 时 $\sigma_p=\sigma_m$ 故

$$\frac{\partial Er_p}{\partial x_i}_{xi=0} = \frac{\sigma_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_m}$$

于是

$$\frac{\partial Er_p}{\partial \sigma_p}_{xi=0} = \left.\frac{\dfrac{\partial Er_p}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \sigma_p}{\partial x_i}}\right|_{xi=0} = \frac{(Er_i - Er_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}$$

并且

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\frac{(Er_i - Er_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} = \frac{(Er_m - r_f)}{\sigma_m}$$

由此得到

$$Er_i = r_f + \frac{(Er_m - r_f)\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \tag{4.35}$$

式(4.35)就是用来描述股票市场中第 i 种股票的风险与报酬率关系的资本资产定价模式。

记 $\beta_i = \dfrac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$，则(4.35)式可写成

$$Er_i = r_f + (Er_m - r_f)\beta_i \tag{4.36}$$

以 r_i 为因变量，r_m 为自变量，对历史数据作回归，可得到回归曲线

$$r_{it} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i r_{mt} + \varepsilon_{it} \tag{4.37}$$

这就是式(4.17)定义的特征线。β_i 可衡量 i 股票在投资组合 m 中的风险。当 m 为市场投资组合时，直线 r_fM 也称为证券市场线。

4.4.3 股票股价计算

下面我们用资本资产定价模式讨论投资组合中引入第 i 种新资产时其均衡价格的确定。

假设 P_i＝第 i 种资产本期初价格；

P_m＝市场投资组合本期初之价格；

V_i＝第 i 种资产本期末的价值即市价＋股利；

V_m＝市场投资组合本期末的价值即包括股利之价值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

那么有

$$r_i=\frac{V_i-P_i}{P_i}=\frac{V_i}{P_i}-1,$$

$$r_m=\frac{V_m-P_m}{P_m}=\frac{V_m}{P_m}-1 \tag{4.38}$$

代入资本资产定价模式(4.35)得

$$\frac{EV_i}{P_i}-1=r_f+\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}\left(\frac{EV_m}{P_m}-1-r_f\right) \tag{4.39}$$

其中

$$\sigma_{im}=\mathrm{Cov}(r_i,\ r_m)=E[(r_i-Er_i)(r_m-Er_m)]$$

$$=E\left[\left(\frac{V_i}{P_i}-\frac{EV_i}{P_i}\right)\left(\frac{V_m}{P_m}-\frac{EV_m}{P_m}\right)\right]=\frac{1}{P_iP_m}\mathrm{Cov}(V_i,\ V_m)$$

$$\sigma_m^2=\mathrm{Var}(r_m)=\mathrm{Var}\left(\frac{V_m}{P_m}-1\right)=\frac{1}{P_m^2}\mathrm{Var}(V_m)$$

代入(4.39)式，得

$$EV_i=P_i(1+r_f)+\frac{\mathrm{Cov}(V_i,V_m)}{\mathrm{Var}(V_m)}[EV_m-(1+r_f)P_m]$$

记 $R=1+r_f$，它即为折现率，上式可写成

$$P_i=\frac{1}{R_f}\left\{EV_i-\left[\frac{\mathrm{Cov}(V_i,V_m)}{\mathrm{Var}(V_m)}\right]^{\frac{1}{2}}\times\left[\frac{EV_m-R_fP_m}{\mathrm{Var}(V_m)}\right]^{\frac{1}{2}}\right. \tag{4.40}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

将$\left[\dfrac{\mathrm{Cov}(V_i,V_m)}{\mathrm{Var}(V_m)}\right]^{\frac{1}{2}}$看作第 i 资产的风险大小，$\left[\dfrac{EV_m-R_fP_m}{\mathrm{Var}(V_m)}\right]^{\frac{1}{2}}$就是风险之市场价格，将期末之期望价值扣除风险贴水，然后求出本期初之现值就是期初的价格。

4.4.4 模式存在的问题

上面讨论的是在资本市场均衡的关系假设下进行的。在应用时会发现此理论常常不能描述现实的经济环境。究其原因主要是以下方面：

(1) 难以对理论进行检定。要检定该理论就首先要检定市场投资组合是否位于效率前缘上，但是真正的市场投资组合必须包括所有资产，它是难以得到的，一般情形下用一个以股价指数作为替代估计投资组合，所导出的效率前缘也是根据实际(事后)报酬率得到，与真正的效率前缘也有出入。

(2) 理论推导所作的假设与实际情况有出入。例如理论假设投资者可以以无风险利率任意借贷，但实际上借贷总是有限制的，而且利率也有差别，同时理论假设投资者对期望报酬率与风险的看法均相同，而事实上投资者总各自有自己的看法，这样投资者就会拥有不同的投资组合。近年来有些研究者对效用函数为二次的假设也提出了质疑凡此种种说明该理论需要进一步修正，文献［11］推导了修正某些假设后的结果。此外还有描述多因素的套利定价模式可参阅文献［11］。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第5章　存在竞争对手的决策方法

5.1　概述

在前几章讨论的决策方法，都只是决策者一方根据各种客观条件(自然因素)来选择最优方案。但在现实生活中，往往遇到的是有利益冲突的各方(竞争对手)共同参与的决策问题，此时所制定的决策主要是针对竞争对手的策略。这种决策也称对策。所谓对策就是决策者为战胜对手在自己策略集合中选取的最优策略。冲突与竞争在现实中是普遍存在的，竞争的结果除与参与者的技艺有关外，还与各方面所采取的策略有关，竞争双方往往各有所长与不足，这时双方都会力争采取最合理的策略充分发挥自己的长处，以期取得竞争的最好结果。例如在市场竞争中，两个企业生产同一种产品，假定此种产品的市场占有率是一定的，那么这两个企业对于市场占有率上的争夺就带有利害冲突的性质。各方占有的多少不仅与自己在生产经营上的措施(即策略)有关，而且与对方的措施有关，这就要求双方都必须根据市场变化信息来研究对策，使自己在竞争中立于不败之地。同样地，在工程招投标中竞争也是十分激烈的，只有根据竞争对手的情形制定自己的策略，才能使自己有获胜可能。此外，在军事、政治、战争问题上都存在大量的对策问题，需要运用对策论的基本理论与方法进行研究。

任何对策问题都要具备下面三个“要素”。

(1) 局中人：即参与竞争的各方，局中人除可以是个人外，还可以是集体，有时也把利益完全一致、互相配合行动的多个参与者看成是一个局中人，当竞赛中有多个局中人时，局中人

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

之间可能产生合作或结盟关系。策略的制定应考虑这些情形。

(2) 策略：策略是指决策者为了战胜对手选择的一套行动方案。所有可供决策者选择的策略的全体称为策略集合。如果参加竞争的各局中人的策略集合中均只含有有限个策略，我们称相应的对策为“有限对策”，否则为“无限对策”，本章只讨论有限对策问题。

在一场竞争(称为一局对策)中，各个局中人选定的策略构成的一个策略组，称为一个局势。

(3) 支付函数：在一局对策中，当局势确定后，就用一个数来表示得失(或输赢)，显然它是局势的函数，称为支付函数。

对于一个对策问题，如果在每个局势中，全体局中人的“得失”相加之和都为零，则称此对策为“零和对策”，否则称为非零和对策。

5.2 两人零和对策

在对策问题中，若只有两个局中人参加竞争，并且各自的策略集合都是有限的，一方所得恰好是另一方所失，并且只进行一局竞争。这种对策称为两人零和对策，此时的支付情形可用矩阵表示，故也称矩阵对策。

5.2.1 支付矩阵

设某决策者(局中人之一)的纯策略集合为

$$S_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$$

其对手(另一局中人)的纯策略集合为

$$S_2=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$$

则纯局势集合为 $S=\{a_i, b_j\}\quad i=1, \cdots; m, j=1, \cdots, n$

决策者的支付函数为 $a_{ij}=f(a_i, b_j)$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

当每个局势引起的得失已知时，支付函数可用矩阵形式表示为

$$A=(a_{ij})=\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{5.1}$$

A 称为此决策者的支付矩阵(或赢得矩阵)。其中正值表示得，负值表示失。在两人零和决策中，显然对手的支付矩阵为

$$B=(b_{ij})=\begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & \cdots & -a_{m1} \\ -a_{12} & -a_{22} & \cdots & -a_{m2} \\ \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

我们把这个对策记做 G，$G=\{S_1，S_2，A\}$。

对于支付矩阵应从广义上予以理解，它可以是货币，也可以是其他的量。如在球赛中可以是比分，在争取市场竞争中，可以是市场增加占有的百分比等。一个支付矩阵实际上就是一个决策表。

例 1 齐王赛马。战国时期，齐王与大将田忌赛马，双方各有上下中三种等级的马，并各自分别从各类马中选出一匹进行比赛，每局输者支付千金(见表 5.1)。就同等级的马而言，齐王的马都比田忌的强，他们两人的策略集合都是{(上中下)、(上下中)、(中上下)、(中下上)、(下上中)、(下中上)}，并且每局结束后双方得失之和为零。表 5.1 上列出了各种局势下齐王的赢得值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 5.1 例 1 中齐王赛马的赢得值

齐王赢得（千金）田忌策略 / 齐王策略	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下
上 中 下	3	1	1	1	1	−1
上 下 中	1	3	1	1	−1	1
中 上 下	1	−1	3	1	1	1
中 下 上	−1	1	1	3	1	1
下 上 中	1	1	−1	1	3	1
下 中 上	1	1	1	−1	1	3

齐王的支付矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 投标问题。设有甲、乙两公司参加某工程承包的投标，若工程的估价为 C，甲的报价策略集为$\{0.9C, 1.0C, 1.1C, 1.2C\}$，乙的报价策略集为$\{0.95C, 1.05C, 1.15C, 1.25C\}$，甲、乙两公司的其他条件均相当，用 1 表示得标，−1 表示失标，表 5.2 表示了甲的赢得情况。

表 5.2 例 2 中甲的赢得值

甲赢得 乙策略 / 甲策略	$0.95C$	$1.05C$	$1.15C$	$1.25C$
$0.9C$	1	1	1	1
$1.0C$	−1	1	1	1
$1.1C$	−1	−1	1	1
$1.2C$	−1	−1	−1	1

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

即甲的支付矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

5.2.2 矩阵对策的最优纯策略

在矩阵对策中，支付矩阵列出了各种可能局势的支付情形，现在我们只进行一局比赛，此时确定的策略称为最优纯策略，那么局中人应如何选择对策，使自己未来的局势中有最大赢得呢？这里我们假设局中人都是有理智的聪明的，因此任何一方均不能靠对手失误侥幸取胜，而必须靠正确的分析，确定最优纯策略。

例 3 已知局中人Ⅰ可以采取的纯策略集为 $S_1=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，局中人Ⅱ可采取的纯策略集为 $S_2=\{b_1, b_2, b_3\}$，局中人Ⅰ的支付矩阵列于表 5.3，试确定各方最优纯策略。

表 5.3 例 3 中Ⅰ、Ⅱ的最优纯策略

Ⅱ策略 / Ⅰ的赢得 / Ⅰ策略	b_1	b_2	b_3	Ⅰ的最小赢得 $\min_j$
a_1	−7	2	−9	−9
a_2	4	3	4	3
a_3	9	−5	−11	−11
a_4	−4	−5	7	−5
Ⅱ的最大支出 $\max_i$	9	3	7	$\max_i \min_j a_{ij}=3$ $\min_j \max_i a_{ij}=$

从支付矩阵 A 来看，局中人Ⅰ的最大赢得是 9，因而他最想选取的策略应为 a_3。但局中人Ⅱ绝不会采取策略 b_1，如果他

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

采取策略 b_3，那么 I 不但得不到 9，反而会损失 11。同样局中人 I 考虑到 II 可能会取 b_3，因而决定改变策略，譬如取 a_4，就可以使对手损失 7。考虑到 I 会取 a_4，那么 II 就会取 b_2，相应地 I 就会取 a_2，此时 I 、II 都不可能取更好的策略了。局势(a_2, b_2)达到了平衡，也就是说如果双方都是有理智的，那么就会从坏处着想，争取在最不利情形下取得最好的结果。

对局中人 I 来说，各个策略的最小赢得为｛−9，3，11，−4｝，因而不管局中人 II 采取什么策略只要自己采取策略 a_2，就可以稳得赢值了。对局中人 II 来说，各种策略的最大损失值为｛9，3，7｝，因而他只要采取策略 b_2 就可保证损失值不超过 3。如果局中人都是有理智的，那么他们就会分别采取 a_2、b_2。这就是他们的最优纯策略，这里有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 3$$

我们称(a_2, b_2)为此支付矩阵的鞍点，鞍点值为 3，在鞍点上达到了平衡局势。

例 4 有一个病人的症状说明他可能患有三种疾病中的一种，可开的药有两种，表 5.4 列出了每种药对这三种病治好的可能性。那么在未确诊前，医生应开哪种药才是最稳妥的呢？

表 5.4 例 4 中医生的最优纯策略

疾病 / 治愈率 / 药	b_1	b_2	b_3
a_1	0.5	0.5	0.6
a_2	0.8	0.1	0.9

$$\begin{array}{rcccc} & & & & \min \\ A = & \left(\begin{array}{ccc} 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.9 \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} 0.5 \\ 0.1 \end{array} \\ \max & 0.8 \quad 0.5 \quad 0.6 & & & \end{array}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

将医生看成局中人Ⅰ，他的策略集为(a_1，a_2)。病人为局中人Ⅱ，他的病构成了策略集{b_1，b_2，b_3}，由此得到支付矩阵 A，并且

$$\max_i \min_j (a_{ij}) = 0.5 \qquad (\text{对应策略 } a_1)$$

$$\min_j \max_i (a_{ij}) = 0.5 \qquad (\text{对应策略 } b_2)$$

且 $$\max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij}) = 0.5$$

故此为最优纯策略为(a_1，b_2)，该医生应给病人服用 a_1 药，至少有 50%的治愈率。

从上面的例于可以看出，鞍点的存在性与最优纯策略的存在性有密切关系。实际上我们有下述定理：

Borel—Von Neumann 定理：设两人零和的支付矩阵为 $A=(a_{ij})$，那么支付矩阵有鞍点的充分必要条件是对策有最优纯策略(证明略)。

设支付矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的鞍点为(i^*，j^*)，鞍点值为 $a_{i^*j^*}$，那么就有不等式组

$$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \qquad i=1,\ \cdots,\ m \tag{5.2}$$

$$a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j} \qquad j=1,\ \cdots,\ n \tag{5.3}$$

成立。

定义 5.1 对矩阵对策 $G=\{S_1,\ S_2,\ A\}$，如果存在纯局势(a_{i^*}，b_{j^*})使得

$$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j} \qquad (i=1,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ \cdots,\ n)$$

则称局势(a_{i^*}，b_{j^*})为对策 G 的解。a_{i^*}、b_{j^*}分别为局中人Ⅰ、Ⅱ的最优纯策略，$a_{i^*j^*}$称为对策 G 的值，记作 V_G。

定理 5.1 矩阵对策在纯策略意义下有解的充分必要条件是

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \tag{5.4}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(1) 证明必要性　由定义 5.1 知

$$\max_i a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant \min_j a_{i^*j}$$

又因

$$\min_j \max_i a_{ij} \leqslant \max_i a_{ij^*} \min_j a_{i^*j} \leqslant \max_i \min_j a_{ij}$$

于是

$$\min_j \max_i a_{ij} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant \max_i \min_j a_{ij}$$

容易证明对任意矩阵 A

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij}$$

结合上面两个不等式，就得到

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

(2) 证明充分性　设 $\min_j a_{ij}$ 在 $i=i^*$时达到最大，而 $\max_i a_{ij}$ 在 $j=j^*$时达到最小，即

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad \max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i a_{ij}$$

由条件知

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

可得

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i a_{ij^*}$$

所以

$$\max_i a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*}$$

故对于一切 $i=1, \cdots, m$，都有 $a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*}$

同理可证，对一切 $j=1, \cdots, n$，都有 $a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}$

由定义可知，对策 $G = \{S_1, S_2, A\}$ 有解(a_{i^*}, b_{j^*})，证毕。

例 5　给定矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, A\}$，其中 $S_1 = \{a_1, a_2,$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

a_3，a_4}，S_2={b_1，b_2，b_3，b_4}，且

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

求双方的最优纯策略，并求对策的值。

解 $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}=\min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}=5$

且 $i^*=1$ 或 3，$j^*=2$ 或 4。故局势(a_1，b_2)、(a_1，b_4)、(a_3，b_2)、(a_3，b_4)都是对策 G 的解，$V_D=5$。

由此可知，对策的解可以是不唯一的，但对策的值是唯一的。

5.2.3 无鞍点对策——最优混合策略

例 6 设局中人Ⅰ的策略集为 S_1={a_1，a_2}，局中人Ⅱ的策略集为 S_2={b_1，b_2}，Ⅰ的支付矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

求对策 G={S_1，S_2，A}的解与对策的值。

解：对局中人Ⅰ有 $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}=0$(取策略 a_1)

对局中人Ⅱ有 $\min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}=4$(取策略 b_2)

但 $$\max_{i}\min_{j} a_{ij}\neq\min_{j}\max_{i} a_{ij}$$

故不存在最优纯策略，即 A 无鞍点。

我们进一步分析局中人的策略。由于当Ⅰ取策略 a_1、Ⅱ取策略 b_2 时，Ⅰ的赢得值(0)比Ⅱ的预期损失值(4)要小，故 a_1 不

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

是Ⅰ的最优策略。考虑到Ⅱ会取策略 b_2，如果Ⅰ冒险地采用 a_2，就会使自己的赢得增大到 4。局中人Ⅱ也会考虑到Ⅰ会有冒险取 a_2 的企图，而出其不意地采取策略 b_1，这样就可使Ⅰ反而损失 4。如此下去，不存在使双方达到均衡的局势，即对策问题不存在鞍点，从而局中人无最优纯策略。

在这种无最优纯策略的问题中，局中人Ⅰ灵活地采用 a_1 和 a_2 可能得到比赢得 0 更好的效果，而局中人Ⅱ灵活地应用 b_1 和 b_2 也可能比损失 4 更少些，结果的好坏取决于Ⅰ随机地选取 a_1 或 a_2(Ⅱ随机地选取 b_1 和 b_2)的概率，那么概率应为多少可达到满意的结果呢？

假设局中人Ⅰ选择策略 a_1 的概率为 p，则选择 a_2 的概率为 $1-p$；局中人Ⅱ选择策略 b_1 的概率为 q，则选择 b_2 的概率为 $1-q$，此时的支付矩阵写成

	Ⅰ \ Ⅱ	q b_1	$1-q$ b_2
p	a_1	10	0
$1-p$	a_2	−4	4

局中人Ⅰ希望自己选择的概率能使自己处于最佳竞争地位，即无论对方采用何种策略总可得到相同的期望收益，即应有

$$10\times p+(-4)\times(1-p)=0\times p+4(1-p)$$

解得 $$p=\frac{4}{9} \qquad 1-p=\frac{5}{9}$$

即在 9 次选择策略中，应有 4 次选 a_1，5 次选 a_2，其期望收益为

$$G_1=10\times\frac{4}{9}+(-4)\times\frac{5}{9}=2.2$$

同理可求出局中人Ⅱ的策略规划，由

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$10\times q+0\times(1-q)=(-4)\times q+4\times(1-q)$$

解得 $q=\dfrac{2}{9}$，　　$1-q=\dfrac{7}{9}$

即局中人Ⅱ在 9 次选择中有 2 次选择 b_1，7 次选择 b_2，这样他的完全损失为

$$G_{\text{II}}=10\times\frac{2}{9}+0\times\frac{7}{9}=2.2$$

局中人Ⅰ的期望收益正好等于局中人Ⅱ的期望损失。

上述问题中局中人不是单一地选择一个策略作为对策，而是按一定的概率随机地选择不同策略，这种情形称为混合策略。

5.2.4 矩阵对策(混合策略)的线性规划解法

上面例子中，局中人的策略集中仅有两个策略，当策略个数较多时，用上述方法解题较复杂，此时可用线性规划方法求解。

例 7 设 $S_1=\{a_1, a_2, a_3\}$，$S_2=\{b_1, b_2, b_3\}$，支付矩阵如表 5.5 所示。试确定最优对策。

表 5.5 例 7 的支付矩阵

支付矩阵 局中人Ⅱ / 局中人Ⅰ		概率	y_1	y_2	y_3	$\min_j$
		策略	b_1	b_2	b_3	
概率	策略					
x_1	a_1		0	1	−1	−1
x_2	a_2		−1	0	1	−1
x_3	a_3		1	−1	0	−1
	$\max_i$		1	1	1	$1\neq-1$

设局中人Ⅰ在局中人Ⅱ的策略 b_1、b_2、b_3 下的期望收益分

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

别为 w_1、w_2、w_3，其最小期望收益 $W=\min\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$；局中人II在局中人I的策略 a_1、a_2、a_3 下的期望损失分别为 v_1、v_2、v_3，其最大期望损失为 $V=\max\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$。那么局中人I所采取的策略应使 W 尽可能地大，于是可得到求解选择策略 a_1、a_2、a_3 的概率 x_1，x_2，x_3 线性规划问题(P_1)

$$(P_1)\qquad \begin{aligned} &\max \quad W \\ &-x_2+x_3\geqslant W \\ &x_1-x_3\geqslant W \\ &-x_1+x_2\geqslant W \\ &x_1+x_2+x_3=1 \\ &x_i\geqslant 0, \qquad i=1,2,3 \end{aligned}$$

同样局中人II应使其期望事实值 V 尽可能地小，于是得到求解的线性规划问题(P_2)

$$(P_2)\qquad \begin{aligned} &\min \quad V \\ &y_2-y_3\leqslant V \\ &-y_1+y_3\leqslant V \\ &y_1-y_2\leqslant V \\ &y_1+y_2+y_3 = 1 \\ &y_i\geqslant 0, \qquad i=1,2,3 \end{aligned}$$

用单纯形法可解得最优解 $X^*=(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$，$Y^*=(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$ 即双方所采取的各种策略的概率均为 $\frac{1}{3}$，此时 $W^*=V^*=0$，即无输赢。利用本节方法，容易求得齐王赛马的最优策略为 $X^*=(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6})^{\mathrm{T}}$，$Y^*=(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6})^{\mathrm{T}}$。且 $W^*=V^*=1$，即齐王总会赢，但历史上的故事却是田

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

忌得一千金。这原因在于，齐王不懂得对策论，骄傲自大，将自己要采取的策略(上中下)公开与众，使田忌能用(下上中)的策略取胜。在这种情形下，就不必再考虑混合策略了。

一般地若 $S_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$S_2=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$。支付矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 已知，那么对策 $G=\{S_1, S_2, A\}$ 的线性规划问题为

$$\max \quad W$$

$$(P_1) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \geqslant W \qquad j=1,\cdots,n \qquad (5.5)$$

$$\sum x_i=1$$

$$x_i \geqslant 0 \qquad i=1,\cdots,m$$

$$\min \quad V$$

$$(P_2) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leqslant V \qquad i=1,\cdots,m$$

$$\sum y_j=1$$

$$y_j \geqslant 0 \qquad j=1,\cdots,n$$

若得到的解 $X^*=(x^*_1, \cdots, x^*_m)$，$Y=(y^*_1, \cdots, y^*_n)$中各只有一个分量非零，则显示对策的解就是最优纯策略，否则为最优混合策略。

5.3 两人非零和对策及 n 人对策

两人非零和对策是指对策结果局中人 I 所得与局中人 II 所得之和不为零的情形。设局中人 I 的策略集为 $S_1=\{a_1, \cdots, a_m\}$，局中人 II 的策略集为 $S_2=\{b_1, \cdots, b_n\}$，且当 I 取策略 a_i、II 取

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

策略 b_j 时双方收益分别为(a_{ij}, b_{ij})，一般 $a_{ij}\neq -b_{ij}$，此时我们可以用所谓“双矩阵”来说明收益情形，这里所谓的双矩阵$(m\times n)$是指其元素是用数对(a_{ij}, b_{ij})，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$ 表示的，记为$(a_{ij}, b_{ij})_{m\times n}$，据此也可将两人非零和对策叫做双矩阵对策。

两人非零和对策由于双方利益不一定具有对抗性，故可分为非合作型对策与合作型对策两种类型。本节将简要地介绍非合作型对策，至于合作型对策，将在 n 人对策中介绍。

5.3.1 非合作型两人非零和对策

非合作型非零和对策是指双方为了最理想的收益，独立奋斗，拒绝与对方有任何意义的相得益彰。下面按不同情形予以讨论。

(1) 优超均衡

例 1 设局中人Ⅰ，Ⅱ有 $S_1=\{上，下\}$，$S_2=\{左，右\}$，其支付矩阵为双矩阵

		局中人Ⅱ 左	局中人Ⅱ 右
局中人Ⅰ	上	(1,2)	(0,1)
	下	(2,1)	(1,0)

我们来讨论此对策的解：

此对策有一个非常简单的解，从局中人Ⅰ的角度看，取“下”的策略结果要好些；而对局中人Ⅱ来说，取“左”的结果更好。因此Ⅰ取下而Ⅱ取左，即策略对(下，左)为双方的最优策略。策略的解为(2，1)，此时局中人Ⅰ得 2，局中人Ⅱ得 1，每个局中人都不以其他局中人的选择而改变自己的最优策略。

一般地，称 $s^*_1\in S_1$ 为局中人Ⅰ的占优策略，如果对应所有的 $s_2\in S_2$，是局中人Ⅰ的严格最优选择，即对策值

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$V^*_D(s^*_1, s_2) > V_D(s_1, s_2) \qquad s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2$$

同样对局中人 II 若也有占优策略 s^*_2，那么对策$(s^*_1,\ s^*_2)$就是优超策略，此时的均衡称为优超均衡。

(2) 纳什(J. F. Nash)均衡

优超均衡并不经常出现，我们来看下面的双矩阵对策。

		局中人 II	
		左	右
局中人 I	上	(2,1)	(0,0)
	下	(0,0)	(1,2)

这里局中人的最优策略都与对方选择有关。若局中人 II 选择左，那么 I 就想选择上；当 II 选择右时，I 就想选择下了。故 I 的最优选择取决于对 II 选择的策略的预测，同样对 II 也是如此。为了达到均衡，我们不要求 I 的选择对于 II 的所有选择来说都是最优的，而只要求对于 II 的最优选择来说是最优的，虽然 II 的最优选择也可能依赖于 I 的选择。

对对策集 $G=\{S_1,S_2,A\}$，对于 $s^*_1 \in S_1$，若 $s^*_2 \in S_2$ 是局中人 II 的最优策略，同时对于 $s^*_2 \in S_2$，若 $s^*_1 \in S_1$ 也是局中人 I 的最优策略，即有

$$V^*_D = V^*_A(s^*_1,\ s^*_2) \geq V_A(s^*_1,\ s_2) \quad \forall s_2 \in S_2$$

$$V(s^*_1,\ s^*_2) \geq V_A(s_1,\ s^*_2) \qquad \forall s_1 \in S_1$$

那么$(s^*_1,\ s^*_2)$就称为纳什均衡。

在上面例子里，策略(上，左)就是一个纳什均衡，因为当 I 选择上时，II 的最适当的选择是左；而当 II 选择左时，I 的最优选择就是上。读者还可以验证(下，右)也构成了一个纳什均衡。

优超均衡必为纳什均衡，反之不一定成立。当选择的对策对不是纳什均衡时，至少存在一个局中人有偏离这个结果的积极性。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

利用纳什均衡，可以在竞争中根据对手已往采取的策略(认为他将继续采用此策略)确定自己最适当的策略。

上面的纳什均衡称为纯策略的纳什均衡，此时每个局中人只作一次策略选择。

(3) 混合策略纳什均衡

在有些对策问题中，纯策略的纳什均衡可能不存在，考虑下面的一个例子。

例 2 社会福利对策

在这个对策中参与的局中人是政府和一个流浪汉。流浪汉有两个策略：寻找工作或游荡；政府也有两个策略：救济或不救济。政府想帮助流浪汉，但其前提是后者必须试图寻找工作，否则，不予帮助，而流浪汉只有在得不到政府救济时才会寻找工作。其支付矩阵为

		流浪汉：寻找工作	流浪汉：游荡
政府	救济	(3,2)	(−1,3)
政府	不救济	(−1,1)	(0,0)

这个对策不存在纳什均衡。给定政府救济，流浪汉的最优策略是游荡；给定政府不救济，流浪汉的最优策略是寻找工作，而给定流浪汉寻找工作，政府的最优策略是救济，如此等等，没有一个策略对构成纳什均衡。

尽管在上例中不存在纳什均衡(纯策略)，但却可以用混合策略方法讨论纳什均衡。这里的纳什均衡是指这样的均衡，在这种均衡状态下，每个局中人对他的策略集中的策略都选定了一组最优概率，设它们分别为

$$X^*=(x^*_1,\ \dots,\ x^*_m) \qquad Y^*=(y^*_1,\ \dots,\ y^*_n)$$

并且 $A=(a_{ij})_{m\times n}$、$B=(b_{ij})_{m\times n}$ 分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的支付矩阵，那么可以证明，当$(X^*,\ Y^*)$满足条件

$$XAY^{*T}\leqslant X^*AY^{*T},\quad X^*BY^T\leqslant X^*BY^{*T}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

此时(X^*, Y^*)就是此对策的混合策略纳什均衡。这里，$X=(x_1, \dots, x_m)$，$Y=(y_1, \dots, y_n)$是局中人的任一组混合策略。XAY^T及XBY^T实际上是在混合策略X、Y下局中人Ⅰ和Ⅱ的收益。

我们再以福利对策为例求解混合策略纳什均衡，假定政府的混合策略为 $X=(p, 1-p)$，即政府以 p 的概率选择救济，$(1-p)$的概率选择不救济，流浪汉的混合策略为$(q, 1-q)$即以 q 的概率选择寻找工作，$(1-q)$的概率选择游荡，并且

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

那么政府的收益为

$$U(p, q)=(p, 1-p)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}=5pq-p-q$$

得到政府收益最优化的一阶条件为

$$\frac{\partial U}{\partial p}=5q-1=0$$

故 $$q^*=0.2$$

即在混合策略均衡中，流浪汉以 0.2 的概率选择寻找工作，0.8 的概率选择游荡。

再考虑流浪汉的最优化问题，其收益为

$$V(p, q)=(p, 1-p)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}=-2pq+q+3p$$

由最优化一阶条件

$$\frac{\partial V}{\partial q}=-(2p-1)=0, \qquad p^*=0.5$$

因此在均衡状态下政府以 0.5 的概率选择救济，0.5 的概率选择不救济；流浪汉以 0.2 的概率选择寻找工作，0.8 的概率选择游

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

荡。

可以证明任何双矩阵的混合策略的纳什均衡总是存在的。但遗憾的是，至今还没有较有效的求法。

例 3 甲、乙两厂生产同一种商品，为了进行销售竞争，两厂各自决定采取降价或不降价策略。若两厂同时采取降价措施，则两厂各可获得利润 1 万元；若一厂降价而另一厂不降价，则降价的厂可得利润 4 万元，而不降价的厂则分文未得；若两厂均不降价，则两厂均可获得利润 1.5 万元。试分析两厂各自对策。

解：由于这两厂均想独占市场，故它们之间的竞争是非合作两人非零和对策。这个对策的双矩阵为

		乙厂 降价	乙厂 不降价
甲厂	降价	(1,1)	(4,0)
	不降价	(0,4)	(1.5,1.5)

容易算得混合策略 $X^*=(1,\ 0)$，$Y^*=(1,\ 0)$构成了纳什均衡，并可验证 $X=(0,\ 1)$，$Y=(0,\ 1)$不是纳什均衡。

这里均衡$(X^*,\ Y^*)$实际是纯策略的纳什均衡，从逻辑上分析，甲、乙两厂都出于多占甚至独占市场的心理，故双方都取了降价策略，其实双方只要有合作心意，商定都采取不降价策略，那么都可得款 1.5 万元，混合策略(0，1)，(0，1)虽然不是均衡，但比均衡要好。由此可见合作在对策中的重要性。

5.3.2 n 人对策

在日常生活或实践中，两个以上的利益集团各自或有联合地谋划的现象极为常见，由此引出了 n 人对策的模型与理论。

在 n 人对策中，n 个局中人相互斗争，相互合作会导致多种潜在利益的分配方式，不同的局中人都追求最有利于自己的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

分配，同时对最终利益分配方式施加各自的影响。

n 人对策也有合作与非合作型两类。对于非合作型对策，可以证明，任何 n 人有限对策至少有一个由各方混合策略 $i=1, \cdots, n$ 形成纳什均衡，但均衡的计算十分复杂，这里我们仅介绍应用更广泛的合作对策模型。

在有合作的 n 人对策理论中，联合是一个基本概念。集合

$$N=\{1, 2, \cdots, n\}$$

表示 n 个利益集团的全体，其中每个整数都代表 n 人对策的一个局中人。我们把 N 的任何非空子集 S 叫做联合。例如 $N=\{1, 2, 3, 4\}$ 时，它有以下各种联合：

一人联合：$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$

二人联合：$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$

三人联合：$\{1, 2, 3\}$，$\{1, 2, 4\}$，$\{1, 3, 4\}$，$\{2, 3, 4\}$

四人联合：$\{1, 2, 3, 4\}$

对于 N 中的每个联合 S 我们用函数 $V(S)$ 表示此联合 S 在这个联合中的价值，它可以是最大的总可能收益、最大效益、最好效果等，称 $V(S)$ 为 N 上的特征函数。对于集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，一共有 2^n-1 个非空子集合以及空集 Φ，故共有 2^n 个子集，我们把这 2^n 个子集形成的集合记作 2^N，于是有

$$2^N=\{S \mid S\in N\}$$

特征函数 $V: 2^N \to R$ 是 2^N 上的一个实值函数，其中 $V(\Phi)=0$，$V(S)$ 是当 S 中的局中人成为一个联盟时，不管 S 外的局中人采取什么策略，联盟 S 通过协调其成员的策略保证能达到的最大赢得值。

我们用局中人集合 N 与特征函数构成的点对 (N, V) 表示有合作的 n 人对策。

例 4　设有钢铁厂 C_1 和 C_2、机械厂 F_1 和 F_2 在生产销售过程中形成了四人合作对策局面

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$N=\{C_1, C_2, F_1, F_2\}$$

C_1、C_2中每一个都可以向F_1、F_2中某一个厂供应新产品，使后者加工后获利，同时F_1、F_2也可以自己生产所需钢铁原料，C_1、C_2也可以自己生产机械产品。不过在C_1、C_2之间和在F_1、F_2之间却不存在合作。

于是可能存在的联合S有：$\{C_1\}$，$\{C_2\}$，$\{F_1\}$，$\{F_2\}$，$\{C_1, F_1\}$ $\{C_1, F_2\}$，$\{C_2, F_1\}$，$\{C_2, F_2\}$，由这些联合导致的合作竞争局面以及相应的期望收入(已知)有以下 7 种：

(1) 各自独立不合作：$\{C_1\}$、$\{C_2\}$、$\{F_1\}$、$\{F_2\}$，收入期望值分别为 35、25、75、，100(千元)

(2) C_1、F_1合作：$\{C_1, F_1\}$、$\{C_2\}$、$\{F_2\}$，收入期望值分别为 300、35、110(千元)

(3) C_1、F_2合作：$\{C_1, F_2\}$、$\{C_2\}$、$\{F_1\}$，收入期望值分别为 500、40、85(千元)

(4) C_2、F_1合作：$\{C_1\}$、$\{C_2, F_1\}$、$\{F_2\}$，收入期望值分别为 38、200、105(千元)

(5) C_2、F_2合作：$\{C_1\}$、$\{C_2, F_2\}$、$\{F_1\}$，收入期望值分别为 40、425、90(千元)

(6) C_1，F_1合作C_2，F_2合作：$\{C_1, F_1\}$，$\{C_2, F_2\}$，收入期望值分别为 400，600(千元)

(7) C_1、F_2合作，C_2、F_1合作：$\{C_1, F_2\}$、$\{C_2, F_1\}$，收入期望值分别为 700、300(千元)

各种可能联合的特征函数V的值为包含此联合的各种可能局面下的有保证的最大收入，例如对于联合$\{C_1\}$来说，其余局中人有三种可能联合 1、4、5，$\{C_1\}$的期望收入分别为 35、38、40，故$V(\{C_1\})=35$，同样可算出

$V(\{C_1\})=35$，　$V(\{C_2\})=25$，　$V(\{F_1\})=75$，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$V(\{F_2\})=100, V(\{C_1, F_1\})=300, V(\{C_1, F_2\})=500,$
$V(\{C_2, F_1\})=200, \quad V(\{C_2, F_2\})=425$

对上面 7 种竞争的收入情况分析，由于(6)、(7)两种局面的期望收入最多，因而形成这两种局面的可能性最大，将局中人的收入按 C_1、C_2、F_1、F_2 的顺序用四维向量来表示。例如在合作局面(6)中设 C_1 的收入为 x_1、C_2 的收入为 x_2、F_1 收入为 x_3、F_2 收入为 x_4，则收入向量$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x_1, x_2, 400-x_1, 600-x_2)$，如果取 $x_1=100$、$x_2=100$，那么 F_1 的收入为 300，F_2 的收入为 500，比它们单调奋斗所可能得到的最好结果都要好，即

$$x_1=100>V(\{C_1\}), \quad x_2=100>V(\{C_2\}),$$
$$400-x_1>V(\{F_1\}), \quad 600-x_2>V(\{F_2\})$$

当不满足这些条件时，除非重新调整分配，否则联盟中成员就有脱离这种合作方式，组成新的联盟的倾向，重新调整分配直到达到各方均满意的结果或者组成新的联盟为止。

5.4 承包工程的投标报价策略

在现代社会中用招投标竞争方式确定工程承包商已经为越来越多部门采用。它更多地体现了任人唯贤和公平竞争思想，因而得到广大承包商的欢迎。一个招投标的过程大体上是这样的：首先由主管部门发标，发标书中详细地规定了工程资料及要求，其中包括设计要求，质量要求和工期以及对承包商的各项要求等。参加竞争的各承包商在购买发标书后要书写投标书进行投标，标书中要进行可行性论证，作出方案设计，最后给出工程估价并给出承包价，称为报价。然后主管部门从中选出获胜者，即所谓“中标”者。诚然主管部门在选择中标者时要权衡各方面的条件和利弊，但报价却是其中关键的因素。本节主要是在其他条件相当的假设下讨论最优报价策略。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

5.4.1 影响投标报价策略的因素

假设某承包商已决定参与一项工程投标，并假定他对于工程的估价 A 是准确的，即 A 就是工程实际造价(直接成本估价)，那么他的报价主要受两个因素的影响。

(1) 预期利润

设报价为 X，则如果中标，承包商可获得直接利润 I.P＝$X-A$，显然报价越高即投高标，具有较高的直接利润，但在投标竞争中得标的机会必然下降，如果投以低标，则得标的机会增加，但直接利润下降。假设承包商所采取的某种投标方式的得标概率为 P，那么他的预期(即期望)利润 E.P 为

E.P＝$p(X-A)$＝p(I.P)(这里不计参加投标的各种支出)

预期利润是确定报价的重要依据。对各种报价的预期利润进行估算，可以确定预期利润最大的报价策略。

(2) 竞争对手的情况

投标竞争的胜败概率与竞争对手的情形有密切关系，因此为了获胜就必须掌握对手的实际情况，研究他们过去投标的实际资料，对可能出现的竞争局面进行预测，以确定自己的最优策略。决策模型的目的就是要找出一个既能考虑到得胜概率又能使预期利润尽量大的报价策略。

5.4.2 判断获胜(中标)概率的方法

投标的关键是判断各种报价的中标概率。在大多数情形下，报价最低的投标者将会获得合同，因而必须预测对手的报价策略。下面提供几个预测方法。

(1) 获胜报价法

获胜报价法是利用承包商过去的获胜报价与所有对手的获胜报价的历史资料来判断获胜概率。这里我们假设竞争者的直接成本估计都相同(或者有一个固定不变的关系)。所有的报价

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

均用直接成本估计的百分数 B 来表示，即

$$B=\frac{\text{报价}}{\text{直接成本估计}}$$

具体做法是:

1) 计算承包人过去每一个获胜报价的 B 值并按大小次序排列，如 0.95，100，110，115，…;

2) 计算竞争对手获胜报价超过 B 的次数，进而算出其获胜报价超过 B 的次数占总获胜报价次数的百分比;

3) 求出在各报价策略下承包人的获胜概率。表 5.6 给出了一个计算获胜概论的实例。

表 5.6 获胜概率计算

承包人获胜报价 B (报价/直接成本)	对手获胜报价超过 B 的次数	对手获胜报价超过 B 的百分数	承包人获胜概率
0.95	25	100	1.00
1.00	24	96	0.96
1.10	10	40	0.40
1.15	5	20	0.20
1.20	0	0	0
获胜总次数 15	获胜总次数 25		

(2) 具体对手法

如果承包商了解将要参加投标的具体对手，则可根据其过去的投标历史来判断自己的中标概率。

1) 只有一个具体对手的情形

根据对手历史投标中的报价，可获得承包人的获胜概率，表 5.7 列出了一个计算实例，图 5.1 给出了一个计算获胜概率的实例。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 5.7 有具体对手时获胜概率计算

承包人报价 B	对手报价为 B 的次数	对手报价为 B 的概率	对手报价超过 B 的概率	承包人报价为 B 的获胜概率
0.75	0	0	1.00	1.00
0.80	1	0.01	0.99	
0.85				0.99
0.90	2	0.03	0.96	
0.95				0.96
1.00	7	0.10	0.86	
1.05				0.86
1.10	12	0.17	0.69	
1.15				0.69
1.20	21	0.30	0.39	
1.25				0.39
1.30	18	0.26	0.13	
1.35				0.13
1.40	7	0.10	0.03	
1.45	12	0.03		0.03
1.50			0.00	0
	$\Sigma=70$	$\Sigma=1.00$		

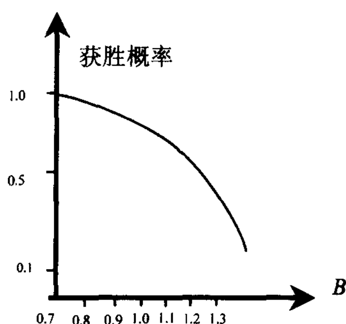


图 5.1 获胜概率曲线

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

2) 有多个(N 个)具体对手的情形

此时为了赢得投标的胜利，承包人的报价必须低于所有的竞争对手。假设报价对于各个对手按上述方法已得到获胜概率分别为 $p_1(B)$，…，$p_N(B)$那么他对所有对手的获胜概率为

$$p(B)=p_1(B)p_2(B)\cdots p_N(B) \tag{5.6}$$

表 5.8 列出了有 3 个具体对手的获胜概率的求法。

表 5.8 多个对手的获胜概率计算

承包人报价 B	对对手 1 的获胜概率	对对手 2 的获胜概率	对对手 3 的获胜概率	对 3 个对手的获胜概率
0.85	1.00	1.00	1.00	1.00
0.90	0.99	0.98	1.00	0.97
1.00	0.98	0.97	0.98	0.93
1.05	0.86	0.80	0.90	0.62
1.15	0.69	0.70	0.75	0.36
1.25	0.39	0.45	0.60	0.105
1.35	0.13	0.13	0.27	0.01
1.45	0.03	0.09	0.10	0.000 1
1.55	0	0	0	0

显然当投标者数目增加时，承包商的获胜概率会急剧下降。

在一般投标情形下，潜在对手应按规定日期提出投标申请，并付款购买发标书。未在规定日期内提出申请的，就没有投标资格，实际上不一定所有合格的投标者最后都会参加报价。因此承包人的获胜概率可能会大一些，故需对式(5.6)进行修正。

假设 $\bar{p}_i$ 是第 i 个对手参加投标的可能性概率，那么对第 i 个对手的获胜概率为

$$p'_i(B)=\bar{p}_i p_i(B)+(1-\bar{p}_i) \tag{5.7}$$

承包人的获胜概率为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$p'(B)=\overline{p}_1(B)\ \overline{p}_2(B)\cdots\overline{p}_N(B) \tag{5.8}$$

例如在表 5.8 中，若承包人的报价 $B=115$，$\overline{p}_1=0.5$，$\overline{p}_2=0.8$，$\overline{p}_3=0.6$，那么有

$$\overline{p}_1(B)=0.5\times0.69+(1-0.5)=0.845$$

$$\overline{p}_2(B)=0.8\times0.70+(1-0.8)=0.760$$

$$\overline{p}_3(B)=0.6\times0.75+(1-0.6)=0.850$$

于是 $\quad \overline{p}_4(B)=0.845\times0.760\times0.850=0.546$

比原来的获胜概率 0.36 要高得多。

(3) 一般对手法

1) 已知竞争对手个数

如果当事人知道他的对手的数量，而不知道具体对手，那么最好的办法是从所有可能对手那里收集情报，汇集后得出想像中的“平均对手”(即一般对手)，然后计算各种报价低于平均对手报价的概率。若他对一个一般对手的获胜概率为 $p_A(B)$，那么他对 N 个对手的获胜概率为

$$p(B)=[p_A(B)]^N$$

表 5.9 列出了获胜概率的计算实例，图 5.2 给出了相应的概率曲线。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 5.9　一般对手获胜概率计算

报价 B (%)	一般对手报价超过 B 的百分数	报价低于 N 个对手的获胜概率				
		$N=1$ $p_A(B)$	$N=2$ $[p_A(B)]^2$	$N=4$ $[p_A(B)]^4$	$N=8$ $[p_A(B)]^8$	$N=10$ $[p_A(B)]^{10}$
95	100	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
100	95	0.95	0.90	0.81	0.66	0.44
105	90	0.90	0.81	0.66	0.43	0.19
110	85	0.85	0.72	0.52	0.27	0.07
115	75	0.75	0.56	0.32	0.10	0.01
120	60	0.60	0.36	0.13	0.02	0
125	40	0.40	0.16	0.03	0	
130	20	0.20	0.04	0		
135	5	0.05	0			
140	2	0.02				

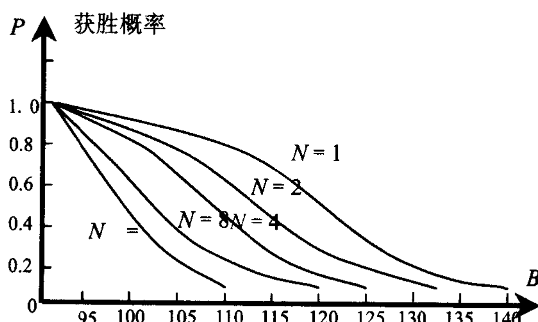


图 5.2　报价低于 N 个对手的获胜概率

2) 对手个数不确定情形

如果当事人既不知道具体对手，又不知道对手个数，那么应用上述一般对手法时需估计不同数目对手的可能性。通过历史资料统计可以得到不同数目竞争者参加类似合同的投标概率。设通过统计得到 f_i 为有 i 个对手参加投标的概率，其中

$i=1, \cdots, N$，$\sum_{i=0}^{N} f_i = 1$，那么获胜概率(期望值)为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$p(B)=f_0+f_1p_A(B)+f_2[p_A(B)]^2+\cdots+f_N[p_A(B)]^N \qquad (5.9)$$

(4) 混合对手法

在参加投标竞争时，若当事人对于他的部分潜在对手是了解的，而对部分竞争者情况不清，那么当事人的获胜概率为

$$p(B)=p_N(B)p_V(B) \qquad (5.10)$$

式中：$p_N(B)$——报价低于所有已知具体对手的概率；

$p_V(B)$——报价低于所有未知的一般对手的概率。

除了上述给出的 4 种客观方法外，主观的分析判断也常常对获胜起很大作用，一个有经验的承包人除了会运用历史资料估计各种报价的获胜概率外，还能应用主观的经验和判断对 f、p 进行修正。例如根据对当前经济形势的分析，就可适当调整 f_i。当经济萧条时，参与投标的对手会相应减少，报价 B 会相应下降。此外，还应对潜在对手的闲置设备的能力，可能拥有的相对有利条件以及潜在的新竞争者的情形有所了解，这样就有助于弥补历史资料的欠缺，更合理确定报价。

5.4.3 最佳报价的确定

假设我们已经知道获胜概率，下面要确定最佳报价。

(1) 按最大预期利润确定报价

设相对报价 $B=\dfrac{\text{报价}}{\text{估价}}\times100\%$，获胜概率为 $p(B)$，那么预期利润率为 $E(B)$。

$$E(B)=\frac{\text{预期利润}}{\text{估价}A}=\left[\frac{(B-100)\times\text{估价}A}{\text{估价}A}\right]\times p(B)$$

$$=(B-100)p(B) \qquad (5.11)$$

表 5.10 是报价与预期利润率之间关系的一个实例。当报价 $B=115\%$时，产生最大利润率 6.30%；当报价等于估价时，预

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

期利润率为零。报价从小于 100%往上增加时，预期利润率从负向上增加到一个较高的位置，然后下降为零。预期利润的最高对应的报价就是最优报价(图 5.3)。

表 5.10 由预期利润率确定最优报价

报价 $B\%$	获胜概率 $p(B)$	直接利润率 $(B-100\%)$	预期利润率 $(B-100\%)p(B)\%$
80	1.00	−20	−20
85	1.00	−15	−15
90	1.00	−10−	−10
95	1.00	−5	−5
100	0.88	0	0
105	0.73	5	3.65
110	0.60	10	6.00*
115	0.42	15	6.30*
120	0.24	20	4.80*
125	0.07	25	1.75
130	0.01	30	0.30
135	0.01	35	0
140	0	40	0

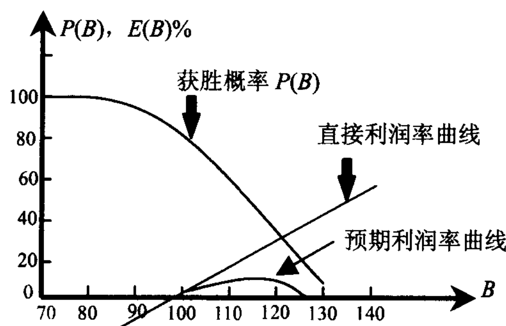


图 5.3 最优报价的确定

有时为了更精确地求出最优报价(即预期利润率最高点对

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

应的报价 B)，可利用当前最大利润率点及其左右两点进行三点插值，设此三点为$(B_1, E(B_1))$、$(B_2, E(B_2))$、$(B_3, E(B_3))$，那么由三点抛物线插值公式得到

$$B=B^*=\frac{(B_2+B_3)E(B_1)-2(B_1+B_3)E(B_2)+(B_1+B_3)E(B_3)}{2[E(B_1)-2E(B_2)+E(B_3)]} \tag{5.12}$$

B^*即为最优报价。

例如对于表 5.10 若取(110，6.00)、(115，6.30)、(120，4.80)进行插值，得到 $B^*=113.3$，即 $B^*=113.3$ 时预期利润最大，代入(5.12)式，此时有 $E(B^*)=6.4\%$，相应的中标概率

$$p(B^*)=\frac{E(B^*)}{(B^*-100)}=0.48。$$

(2) 按一定的中标概率确定最优报价

有时企业有较充足的设备和人员，急需争取一些任务，因而他的投标策略是在保证最低中标概率下尽量扩大它的预期利润率。例如在表 5.10 上若企业要求最低中标概率为 0.5，那么预期利润率为 6%的报价 $B=110$ 就是最优报价了。

(3) 限定最低利润率的最优报价

当企业报价为 B 时，其直接利润率为$(B-100)\%$，当企业的经营水平已接近其生产能力时，它首先考虑的已不是中标概率而是考虑中标时可得到的最低利润，也就是说，如果没有一定利润保证，它宁可不干。此时可将直接利润率作为报价依据，例如企业准备接受任务的最低直接利润率为 20%，达不到此利润率就不接受。那么，此时的最低报价为 120%。直接利润率为 20%，预期利润率为 4.8%。

总之，我们可以根据企业的实际能力与需求灵活地确定报价策略。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第 6 章　项目评估直接法

6.1　概述

在确定投资项目时，我们必须对项目可行性进行讨论。这涉及到投资环境、社会影响等，必须予以全面、综合的评估与分析。评估的正确与否，将会直接影响决策的正确性。因而，评估是决策的前奏与先行。

对于一个大的工程，不仅在项目开始前需要进行评估，以分析其可行性，而且在项目进行时也需要进行评估，以随时采取适当措施。不同阶段的评估有不同的目的与要求，根据不同时期的评估可分为以下四种类型。

(1) 事先评估：其目的主要进行项目可行性研究；

(2) 中间评估：在计划实施阶段中期进行评估，着重检验计划或项目实施完成情况；

(3) 事后评估：项目完成后进行评估，检验项目是否达到了预期目标；

(4) 跟踪评估：在项目完成后运行过程中继续评估，如研究水库建成后的生态影响、工厂投产后的经济效益、重大决策实施后的社会影响等均需进行长期分析。

无论是哪一阶段的评估，均需按照一定程序进行。图 6.1 列出了评估工作的具体程序和步骤。

我们要处理的评价问题，往往是复杂的、社会的、经济的或技术系统的一部分。常常涉及多准则、多目标。完全定性的处理方法显然已不能满足当前发展的需要，而完全定量的方法也往往是不切实际的，尤其是在决策的初始阶段，决策者往往

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

会面对资料匮乏或不全的状态。此时采用精确的量化方法往往会事倍功半。而应用一些定量与定性相结合的简单评估法却可起到较好的效果，本章介绍一些简单的主要是以专家的知识和经验为基础的定量与定性相结合的方法。我们把这一类方法统称为直接法。

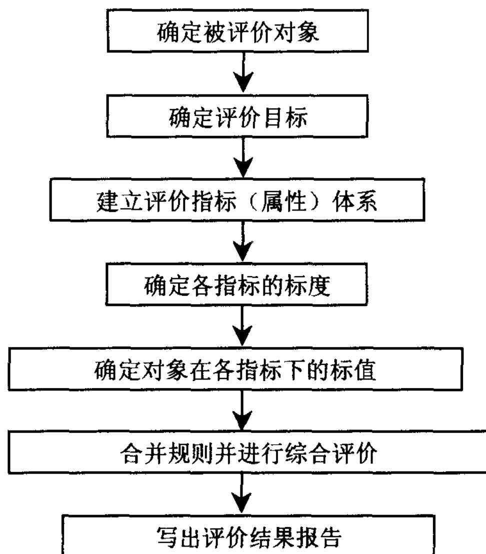


图 6.1　评价程序

6.2　专家评价法

6.2.1　相同标度下的直接评分法

该法以主观判断为基础，以分值、序数或评语直接对所讨论的属性(或准则、指标)或属性下的对象进行评估。当以序数和评语作为判断结果时，应将它们转化成相应分值，并且假设所有属性下的评分均具有相同标度。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

设有 m 个准则：C_1，…，C_m，n 个被评对象：O_1，…，O_n，专家评定第 i 个对象在第 j 个准则下的得分为 S_{ij}，如表 6.1 所示。那么对象 O_i 的综合分值 $S_i(i=1, \cdots, n)$可由下述方法得到

(1) 累加评分法 $$S_i=\sum_{j=1}^{m} S_{ij} \tag{6.1}$$

(2) 连乘评分法 $$S_i=\prod_{j=1}^{m} S_{ij} \tag{6.2}$$

(3) 加权评分法　根据准则的重要性对它们赋予权值 w_1，…，w_m，$\sum_{i=1}^{m} w_i=1$，然后再累加或连乘：

$$S_i=\sum_{j=1}^{m} w_i S_{ij} \tag{6.3}$$

或

$$S_i=\prod_{j=1}^{m} (S_{ij})^{wj} \tag{6.4}$$

无论哪一种方法，最后均以综合分值最大者为最优。

表 6.1　直接评分法

权重 / 准则 / 分值 / 对象	C_1	C_2	…	C_m	累加评分	连乘评分	加权评分(累加法)
	w_1	w_2	…	w_m			
O_1	S_{11}	S_{12}		S_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} S_{1j}$	$\prod_{j=1}^{m} S_{1j}$	$\sum_{j=1}^{m} w_j S_{1j}$
O_2	S_{21}	S_{22}		S_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} S_{2j}$	$\prod_{j=1}^{m} S_{2j}$	$\sum_{j=1}^{m} w_j S_{2j}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
O_n	S_{n1}	S_{n2}		S_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} S_{nj}$	$\prod_{j=1}^{m} S_{nj}$	$\sum_{j=1}^{m} w_j S_{nj}$

当有多个(t 个)专家参与评判时，若第 k 个专家的评价为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$S^{(k)}_{ij}$($k=1$，…，t；$i=1$，…，n；$j=1$，…，m)，根据专家的能力赋予权重因子 $p^{(k)}$，那么由加权评分法可得到

$$S_i=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{m}p^{(k)}w_jS_{ij}^{(k)} \tag{6.5}$$

这里 $\sum_{k=1}^{t}p^{(k)}=1$，$\sum_{j=1}^{m}w_j=1$。同样也可得到连乘加权评分。

6.2.2 图形表示法

用图形给出评价结果，具有直观性强的优点，常用于作初始评价，可采用的图形主要有：

(1) 坐标图

用等距横坐标表示各个准则，用纵坐标表示某对象在各准则下所得分值，连接各点得到一条曲线，以曲线位于上方者为优。如图 6.2 所示。

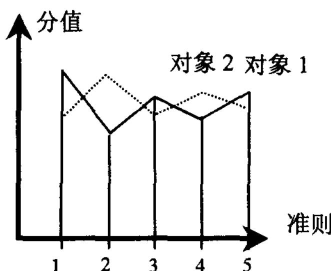


图 6.2 坐标图

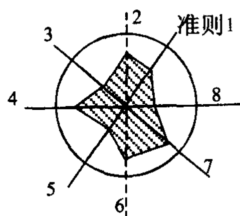


图 6.3 轮廓图

(2) 轮廓图

将一个圆按准则个数分成等份，每条等分线代表一个准则。将某个对象的分值在相应等分线上标出，连接各点，得到一条

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

封闭曲线，其所围面积即代表该对象的综合分，面积越大者越优，如图 6.3 所示。

6.2.3 规范化综合法

当各属性下的得分标度不同时，我们不能将这些得分直接相加或连乘，例如有的得分以 100 为标准分，有的以 5 分为标准。有时标值越大越好，有时标值越小越好(如成本)，这时要得到综合评价就需要将这些数值进行适当转化，使之可以相加。这个转化过程就是规范化过程。根据不同情形，可分别采用下述几种规范化方法。

(1) 按标准分规范化

设 S_{ij} 为第 j 个属性下第 i 个对象的得分，若规定此属性下的标准分(可采用满分或最高分)为 S_{0j}，那么规范化后的得分为 $\widetilde{S}_{ij}$

$$\widetilde{S}_{ij}=\frac{S_{ij}}{S_{0j}} \tag{6.6}$$

(2) 按最高分规范化

若第 j 个属性的最高分为 $S^{(j)}_{\max}$，最低分为 $S^{(j)}_{\min}$，那么规范化后得分为

$$\widetilde{S}_{ij}=\frac{S_{ij}-S^{(j)}_{\min}}{S^{(j)}_{\max}-S^{(j)}_{\min}} \tag{6.7}$$

这种规范化方法适用于分值越高越好的情形，可用于评价成绩或效益等。

(3) 按最低分规范化

$$\widetilde{S}_{ij}=\frac{S^{(j)}_{\max}-S_{ij}}{S^{(j)}_{\max}-S^{(j)}_{\min}} \tag{6.8}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这种规范化方法适用于标值越低越好的情形，可用于评价费用、成本等。

(4) 按某固定值为最优的规范化

例如人口增长、收入消费比等，均以某固定值为最优，设第 j 个属性的最优值 r，那么得分 $\widetilde{S}_{ij}$ 应为

$$\widetilde{S}_{ij}=\frac{\max\limits_{k}\left|S_{kj}-r_j\right|-\left|S_{ij}-r_j\right|}{\max\limits_{k}\left|S_{kj}-r_j\right|} \tag{6.9}$$

其中 S_{kj} 为第 k 个对象在第 j 个属性下的标值。

通过规范化得到的分值已与标度无关，并且是越大越好，可以将它们累加求和或连乘之以得到综合分。

6.2.4 理想点法

理想点法是确定一个各个属性均为最优的理想状态(称为理想点)，然后按实际对象与理想状态的差别给予综合评价。其步骤如下：

(1) 由专家打分得 m 个属性、n 个对象的属性矩阵

$$A^*=(a_{ij})$$

(2) 将属性矩阵 A 的各列按上一节方法规范化，得矩阵

$$\widetilde{A}_{ij}=(\widetilde{a}_{ij})$$

(3) 按属性权重进行加权，得加权规范化属性矩阵

$$A=(a_{ij})$$

其中

$$a_{ij}=(\widetilde{a}_{ij})w_j$$

这里 w_j 为第 j 个属性的权重，且 $\sum w_j=1$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(4) 确定理想点及反理想点

$$令\ p^*_j = \max_i a_{ij},\quad p_{j*} = \min_i a_{ij},$$

由此得到

理想点 $p^*_j = (p^*_1, \cdots, p^*_m)$

反理想点 $p_* = (p_{1*}, \cdots, p_{m*})$

(5) 计算评价对象 i 与理想点的差距 d^*_i

$$d^*_i = [\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} - p^*_j)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad i = 1, \cdots, n \tag{6.10}$$

(6) 计算对象 i 与理想点的贴近度 T^*_i

$$T^*_i = \frac{(p^* - a_i)^T(p^* - p*)}{(p^* - p*)^T(p^* - p*)} \tag{6.11}$$

其中 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})$。贴近度越小，表示与 p^*越贴近。

(7) 按 T^*_i 及 d^*_i 进行排序

首先按贴近度排序，当两个对象的贴近度相同时再根据差距排序。

例 1 已给出属性矩阵 A^*及属性权重。

属性 \ 对象	1	2	3
	$w_1 = 0.3$	$w_2 = 0.3$	$w_3 = 0.4$
甲	0.08	50	150
乙	0.08	40	170
丙	0.07	60	140
丁	0.05	80	200

其中属性 1 以值越小越好，属性 2 以值越大越好，属性 3 以值越接近 160 越好。试对甲、乙、丙丁进行排序。

解：首先对各属性值进行规范化得规范化属性矩阵 $\tilde{A}$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 3/4\\ 1/3 & 1/2 & 1/2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

然后对 $\tilde{A}$ 的元素按属性权重加权得 A

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0.075 & 0.3\\ 0 & 0 & 0.3\\ 0.1 & 0.15 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0\end{pmatrix}$$

计算理想点及反理想点

$$P^*=(0.3,\ 0.3,\ 0.3)^T,\ P_*=(0,\ 0,\ 0)^T$$

由此计算差距及贴近度

$$d^*_1=0.375,\ d^*_2=0.424,\ d^*_3=0.269;\ d^*_4=0.3$$

$$T^*_1=0.583,\ T^*_2=0.667,\ T^*_3=0.5,\ T^*_4=0.333$$

按贴近度排序为丁≻丙≻甲≻乙(这里符号≻表示优于)。按差距排序为丙≻丁≻甲≻乙。

6.2.5 优序法(即因素比较法)

设属性集为$\{C_1,\ \cdots,\ C_m\}$，对象集为$\{O_1,\ \cdots,\ O_n\}$，对属性 t 定义比较矩阵 $A^{(t)}=(a^{(t)}_{ij})$

$$a^{(t)}_{ij}=\begin{cases}1 & \text{对属性 } C_t \text{ 而言 } O_i\succ O_j\text{（}\succ\text{表示优于）}\\ 0.5 & \text{对属性 } C_t \text{ 而言 } O_i\sim O_j\text{（}\sim\text{表示相当）}\ t=1,\ \cdots,\ m\\ 0 & \text{对属性 } C_t \text{ 而言 } O_i\prec\sim O_j\text{（}\prec\text{表示劣于）或 } i=j\end{cases}\tag{6.12}$$

则 $A^{(t)}$是一个对角元素为 0，其他元素为 0，0.5 或 1 的 $n\times n$ 矩阵，且若 $a^{(t)}_{ij}=1$，则 $a^{(t)}_{ji}=0$，若 $a^{(t)}_{ij}=0.5$，则 $a^{(t)}_{ji}=0.5$。那么

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

O_i 在属性 C_t 下的优序数为 $a_i^{(t)}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(t)}$

O_i 的总体优序数为 $a_i=\sum_{t=1}^{m} a_i^{(t)}$

当属性 C_t 具有权重 w_t，$t=1, \cdots, m$ 且 $\sum w_i=1$ 时

$$a_i^{(t)}=\sum_{j=1}^{m} w_t a_{ij}^{(t)}$$

当有 r 个专家参与判断，其中第 k 个专家的比较矩阵为 $A^{(t)}{}_k=(a_{ij(k)}{}^{(t)})$，且专家权重为 λ_k，$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i=1$ 时，最后对象 O_i 的优序数为

$$a_i=\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \lambda_k w_t a_{ij(k)}^{(t)} \quad i=1, \cdots, n$$

根据优序数 a_i 的大小可对对象进行排序。

例 2 设某科研所要从 10 个助研中提升 4 名副研，考察项目有知识(C_1)、业绩(C_2)和外语水平(C_3)。专家小组(作为一个专家处理)对 10 人的单项测试结果列于表 6.2 上部，其中对 C_1、C_2 给出的是单项排序，C_3 给出的是分值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 6.2 例 2 中 10 人单项测试结果与排序

属性权重			对象									
			O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
C_1知识		0.4	5	1	7	6	2	8	4	3	9	7
C_2业绩		0.4	4	6	8	5	1	7	3	2	6	7
C_3外语		0.2	80	70	90	72	82	95	80	81	75	80
优序数	C_1	未加权	5	9	2.5	4	8	1	6	7	0	2.5
		加权	2.0	3.6	1.0	1.6	3.2	0.4	2.4	2.8	0	1.0
	C_2	未加权	6	3.5	0	5	9	1.5	7	8	3.5	1.5
		加权	2.4	1.4	0	2.0	3.6	0.6	2.8	3.2	1.4	0.6
	C_3	未加权	4	0	8	1	7	9	4	6	2	4
		加权	0.8	0	1.6	0.2	1.4	1.8	0.8	1.2	0.4	0.8
总加权优序数			5.2	5.0	2.6	3.8	8.2	2.8	6.0	7.2	1.8	2.4
序			4	5	8	6	1	7	3	2	10	9

下面 C_1 的比较矩阵最右列给出了加权优序数。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	优序数	加权优序数
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	5	2.0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9	3.6
3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0.5	2.5	1.0
4	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	4	1.6
5	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	8	3.2
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0.4
7	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	6	2.4
8	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	7	2.8
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0.5	0	0	1	0	0	1	0	2.5	1.0

6.3 特尔斐(Delphi)方法

特尔斐法是由蓝德(RAND)公司研究发展的一种决策、预测和技术咨询的有效方法。它依靠专家小组背靠背的集体判断来

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

代替面对面的会议讨论，使不同专家的意见分歧和理由都得以充分表达。以求最后达到符合客观事物本质的一致意见。

特尔斐法中专家小组成员以 20～50 人为宜，并尽量使参加者分布在较广的地区上。特尔斐法的参与者应包括三部分人，他们是：(1) 决策人，他们是问题提出人和最后结果的采用人；(2) 专业干部，他们负责组织和处理方法的技术问题，整理归纳咨询意见；(3) 专家组，他们是特尔斐法征求意见的对象，也是制定决策的成员。

6.3.1 方法过程

一个完整的特尔斐法过程由下面九个步骤组成：

(1) 提出问题，即提出要作的决策、预测或技术咨询的问题，问题应提得清楚、确切、简单扼要。

(2) 选择并确定专家组成员，成员选择恰当与否将直接影响结果的正确性。专家组成员应有一定代表性，对要解决的问题有丰富的知识与经验以及较高的权威性。此外，该专家应对所论及的问题有兴趣并有时间参与该项工作。

(3) 把第一个咨询表发给专家组中成员，该咨询表只提出问题及问题达到的目标，由专家组中成员自己提出达到目标的方案与措施。咨询表要便于专家发表意见，填表要尽量简单，有时可用数字或字母表示意见。

(4) 回收第一个咨询表，进行筛选、分类、归纳整理。归并相似的意见，筛除对特定目标不重要的因素，并以准确的语言、简洁的方式，制定一份方案或因素一览表。切忌在整理时掺杂整理者的意见，若专家群的意见不能采纳，组织者可重新挑选成员，组成新的专家群。

(5) 把第一轮整理得到的一览表发给专家群成员，开始第二轮咨询，这一轮除要求专家对一览表上的条目(即因素)继续

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

发表补充修改意见外，主要要求它们对表中每个方案或因素的重要性作出评价，评价以等级或分值表示并希望成员简单明了地说明自己选择的理由，但不要求提出详细论据。

(6) 组织者收集第二个咨询表，并进行数据统计处理，常用的统计方法有四分位法和平均值一方差法(将在下面介绍)，再制定第三个咨询表。

(7) 组织者将第三个咨询表发给专家群人员，将前一轮评估信息反馈给专家。进行再咨询。专家在重新评估时，可根据总体倾向和分散度修正自己前一次评估的意见，也可要求偏离总体倾向较大的成员说明论证自己的观点。

(8) 用类似的方法收集第三轮咨询表，并发出第四轮咨询。

(9) 对第四轮咨询进行整理和处理，此时一般总能得到协调程度较高的结果，写出结果报告，其中包括方案或因素一览表，它们的排序或分值或四分位点等。

在实际测定时，特尔斐方法也可稍作变动：

(1) 取消第一轮咨询，由组织者直接拟定方案或因素一览表，以减轻专家负担和缩短测定周期。

(2) 提供背景材料和数据，使专家能在较短时间内作出选择。

(3) 部分取消匿名(即可作集体讨论)和反馈，以加快测定过程。

6.3.2 咨询结果的数据处理

(1) 四分位法

设得到一串数据，首先将它们从小排到大得到序列 $\{x_k\}$，然后计算 $\{x_k\}$ 的中位数和四分位数。

中位数：序列 $\{x_k\}$ 中某数若满足有一半数值不小于 x^*，有一半数值不大于 x^*。则称 x^* 为此数据列 $\{x_k\}$ 的中位数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

四分位数：设上述数据列 $\{x_k\}$ 的中位数为 x^*，大于等于 x^*的这一半数的中位数叫做上四分位数，记做 Q_3，小于等于 x^* 的这一半数据的中位数称做下四分位数，记做 Q_2，量

$$t=\frac{Q_3-Q_2}{2}$$

称为该数列的四分位偏差，它的值越小，数据越集中。

评述事件发生的时间，一般可采用四分位法。例如假设对某事件发生的年份，13 名专家给出的评估值为

1987　1988　1989　1990(A)　1991　1993　1994(B)
1994　1994　1995(C)　1996　1997　1999

那么中位数为 1994(B)，上下四分位数分别为 1995(C)以及 1990(A)，四分位偏差为 t=2.5。在反复咨询过程中，专家们的意见会自动向中位数靠近，四分位偏差会越来越小，从而得到协调程度较高的结果。

(2) 平均值—方差法

首先求出各种评估意见的概率分布，用方差表示不同意见的分散程度，然后专家根据均值和方差了解总体意见的趋向以便作出下一轮评估。

在因素评估中常用等级评估和分值评估。分值评估常采用 5 分制或百分制。等级评估常用序号作为量化值。

在分值评估中，若专家人数为 r，a_k 为第 k 名专家对某方案的评分值，那么均值 E 与方差 σ 为

$$E=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}a_k$$

$$\sigma^2=\frac{1}{r-1}\sum_{k=1}^{r}(a_k-E)^2 \tag{6.13}$$

在等级评估中，均值和方差的计算公式为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$E=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{N}n_k\sum_{k=1}^{N}a_k n_k$$

$$\sigma^2=\frac{1}{\sum_{k=1}^{N}n_k-1}\sum_{k=1}^{N}(a_k-E)^2 n_k \tag{6.14}$$

式中，N 是等级总数；a_k 为等级序号(1，2，…，N)；n_k 是把某方案评为第 k 等级的专家人数。

鉴于专家组成员从事的工作和经验各不相同，因而对他们对不同问题的反应可进行加权处理，最简单的方法是赋予不同的权威系数，在统计处理时予以考虑。

特尔斐法由于需要多次反馈，故一般要花费较长的周期才能完成。

6.4 穆迪顺序图

穆迪顺序图是一种简便的排序工具，利用它决策者可有效地审议众多行动方案。该法按照项目的相对重要性利用简单排列方法求得结果。本节介绍三种顺序图：简单顺序图，逐次输出加权顺序图，联合顺序图。

6.4.1 简单顺序图

简单顺序图可帮助决策者按影响目标重要性程度将因素进行排序，其过程如下：

(1) 确定问题的目标以及达到该目标需要考虑的因素。

在这一步要尽量列出所有因素，然后进行归纳分析，合并相似因素，排除明显不相干因素，最后得到 n 个因素 $v_1,\cdots,v_n$。

(2) 构造 n 行 n 列的表格，划去对角方格，然后将第 i 行上因素 v_i 与 j 列上的因素 $v_j(j=1,\cdots,n,\ j\neq i)$的重要性进行比较，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

若 v_i 比 v_j 重要，则在 i 行与 j 列交叉处(记为 v_{ij})填 1，否则填 0，将 $i=1$，…，n 均比较完毕，就得到一个顺序图，下面就是一个 6 个因素的顺序图(图 6.4)。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	总数	序
v_1		0	1	0	0	0	1	5
v_2	1		1	1	1	0	4^+	1
v_3	0	0		0	0	0	0	6
v_4	1	0	1		0	1	3^+	3
v_5	1	0	1	1		1	4	2
v_6	1	1	1	0	0		3	4
						Σ	15	

图 6.4 顺序图的一个实例

(3) 将每一行的 1 相加得到总和列于表的右边。

(4) 按每行累加总数进行排序。一行的总数越大该因素越重要。当有两行总数相同时，则用该两因素的单独比较决定其次序。例如 v_2 与 v_5 总数均为 4，但在第 2 行第 5 列填的是 1，故 v_2 比 v_5 重要，在第 2 行的总数 4 上标上"+"号，同样在第 4 行的 3 上标上"+"号，由此得到序数，列在最后一行。因为 $v_{ij}+v_{ji}=1$，故容易证明表中累计总数应为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$。

6.4.2 逐次输出加权顺序图

上述顺序图只能处理最简单的情形，现在考虑一种复杂一些的情形，假设某单位有四个部门，为了发展经济要求每单位提出 3 个方案，然后从 12 个方案中选取 9 个方案(即排除 3 个方案)，参加评判的人员除各部门一名代表外，还有单位一名领导。现在以"最应排除的方案"为问题的目标填写顺序图。若方案 1 与方案 2 相比，有 3 人主张应排除方案 1，而 2 人意见相反，那么在第一行第 2 列即 v_{12} 的位置上填写 3 而在 v_{21} 的位

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

置上填写 2，如此等等可以得到下面顺序图 6.5，这里假设部门 1 提供的方案为 1，2，3，部门 2，3，4 提供的方案分别为 4，5，6 和 7，8，9 以及 10，11，12。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	总数	划去第 6 行 第 6 列	再划去第 1 行 第 1 列
1		3	4	5	3	2	4	1	3	4	5	3	37	35√	
2	2		3	4	3	3	4	2	3	4	5	1	34	31	29√
3	1	2		2	3	2	4	2	4	5	5	2	32	30	29
4	0	1	3		3	1	3	2	5	3	4	4	29	28	28
5	2	2	2	2		0	2	3	3	3	4	3	26	26	24
6	3	2	3	4	5		4	4	2	4	5	3	39√		
7	1	1	1	2	3	1		2	3	3	4	3	24	23	22
8	4	3	3	3	2	1	3		2	3	5	4	33	32	28
9	2	2	1	0	2	3	2	3		3	3	2	23	20	18
10	1	1	0	2	2	1	2	2	2		4	4	21	20	19
11	0	0	0	1	1	0	1	0	2	1		1	7	7	7
12	2	4	3	1	2	2	2	1	3	1	4		25	23	21
													$\sum=330$	$\sum=275$	$\sum=225$

图 6.5　一个逐次输出加权顺序图的实例

从顺序图上可看出，方案 6 是最应排除的方案。此时不要把另外两个应排除方案同时选出，而应在排除方案 6 后，在剩下的 11 个方案中再作比较，确认下一个应排除方案。为此我们从图中划去第 6 行第 6 列，再进行累加，得到下一个应排除方案 1，再划去第 1 行第 1 列后得到应排除的方案 2。本例中逐次排除的结果与一次排除的结果是一样的，但并不总是这样，而且逐次结果比一次输出更合理些。下面的例子可以说明这一点。

假设某一部门考虑从 A、B、C、D、E 五人中提拔一人作领导。考察的方面有性格、能力和学历，还要考虑有些人会不愿意担任领导的情形。比较时按 6 分制给分，给分标准为

3—3：两人相比各方面势均力敌或即使单项有参差，但总

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

体旗鼓相当；

4—2：前者比后者在性格、能力、受教育方面中有一方面占优势；

5—1：前者比后者在性格、能力、受教育上有两方面占优势；

6—0：前者比后者在性格、能力、受教育上均占优势。

例如甲受教育最好，但与乙相比，乙的性格较好，两人的能力差不多，故它们的分值应为 3—3。如果乙的能力也比甲强的话，那么他们的分值应为 2—4，图 6.6 是他们的顺序图。由图可知 E 是最佳人选，而 C 排名第二。如果 E 因各种原因不能出任职务，不能直接由 C 顶替，而应从图中划去第 5 行第 5 列从剩下的四人中选取，此时得顺序图 6.7。由图可知，此时最佳人选应为 D 而不是图 6.6 中的 C。还可以继续分析 D 也不能上任的情形，最后可用累计总数 $T=\dfrac{n(n-1)}{2}\times P$ 检验填表的准确性。这里 P 是最大可能得分。例如对图 6.6，$n=5$，$P=6$，故 $T=\dfrac{5\times 4}{2}\times 6=60$ 与累计相同。

	A	B	C	D	E	总数	序
A		2	3	3	2	10	5
B	4		1	2	4	11	4
C	3	5		2	2	12	2
D	3	4	4		0	11	3
E	3	2	4	6		16	1
						$\Sigma=60$	

图 6.6 第一次输出

	A	B	C	D	总数	序
A		2	3	3	8	3
B	4		1	2	7	4
C	3	5		2	10	2
D	3	4	4		11	1
					$\Sigma=36$	

图 6.7 第二次输出

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

6.4.3 联合顺序图

在上面的顺序图中，所作的判断往往比较笼统、含糊。当影响因素很多时，很难作出正确判断。例如在上面提拔人才的例子中考虑了三个因素，如果考虑的因素更多些，要进行直接比较是很困难的。为此我们可以针对每个准则或因素作一张顺序图，然后对每个因素加权，再将各图得分相加。按此进行排序。例如上面的人才提拔问题，仍考虑三个因素，采用前面的0～1记分法，得到图 6.8(a)、(b)、(c)，最后结果列于表 6.3 上。这种计分法称为联合顺序图法。

因素 1　学历　权重 1

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	得分	加权分
A		1	1	1	1	4	4
B	0		0	1	0	1	1
C	0	1		1	0	2	2
D	0	0	0		0	0	0
E	0	1	1	1		3	3

(a)

因素 2　性格　权重 1

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	得分	加权分
A		0	0	0	0	0	0
B	1		0	0	1	2^{+}	2^{+}
C	1	1		0	0	2	2
D	1	1	1		0	3	3
E	1	0	1	1		3^{+}	3^{+}

(b)

因素 3　能力　权重 2

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	得分	加权分
A		0	1	0	0	1	2^{+}
B	1		0	0	1	2	4
C	0	1		0	0	1	2
D	1	1	1		0	3	6
E	1	0	1	1		3^{+}	6^{+}

(c)

图 6.8　联合顺序图法实例

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 6.3 联合顺序图法实例

因素 对象	学历	性格	能力	总分	一次排序号
A	4	0	2^+	6^+	4
B	1	2^+	4	7	3
C	2	2	2	6	5
D	0	3	6	9	2
E	3	3^+	6^+	12	1

穆迪顺序图还可在加权上进行各种变化，使应用更加灵活。但对于大型较复杂的决策问题，单依靠顺序图是不够的，应采用更有效的系统决策方法。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第 7 章　层次分析法(AHP)

7.1　概述

层次分析法(Analatic Hierarchy Process，简称 AHP)，是美国运筹学家萨迪(T.L.Saaty)教授于 20 世纪 70 年代初提出的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法。它把一个复杂问题分解成组成因素，并按支配关系形成层次结构，然后用两两比较方法确定决策方案的相对重要性。层次分析法的整个过程体现了人的决策思维的基本特征，即分解、判断和综合。它将定性判断与定量分析相结合，用数量形式表达和处理人的主观偏好，从而为科学决策提供了依据。运用层次分析法易于在决策分析者与决策制定人之间进行沟通，在大部分情形下，决策者可直接使用 AHP 进行决策，从而大大提高了决策的有效性、可靠性与可行性。

层次分析法从本质上讲也是一种专家参与的决策方法，但由于它采取了层次结构与相对标度，因而比前一章中所介绍的直接法远为灵活、多彩，可以解决的问题也更复杂，其结果也更有说服力。

层次分析法特别适用于系统中某些因素缺乏定量数据或难以用完全定量分析方法处理的政策性较强或带有个人偏好的决策问题。它在经济发展规划、能源需求预测与选择、人才需求与选拔、经济政策评价、投资项目评估以及工程承包招投标中都得到了有效应用。

层次分析法的发展可追溯到 20 世纪 70 年代初。1971 年萨迪用 AHP 为美国国防部研究了“应急计划”。1972 年他又为美

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

国国家科学基金研究了电力在工业部门的分配问题。1973 年为苏丹政府研究了苏丹运输规划。1977 年萨迪在第一届国际数学建模会议上发表了“无结构决策问题的建模——层次分析法”，从而引起了人们的注意。AHP 作为一种决策方法是在 1982 年 11 月召开的中美能源、资源、环境学术会议上由萨迪教授的学生高兰尼柴(H.Gholamnezhed)首先向中国学者介绍的，此后在我国得到了广泛应用，在理论和实践方面都有了发展与提高。

7.2 层次分析法的基本方法与步骤

运用 AHP 进行决策时，大体可分为四个步骤进行：

(1) 分析系统中各因素之间的关系，建立系统的递阶层次结构；

(2) 对同一层次的各元素关于上一层次中某一准则的重要性进行两两比较，构造两两比较判断矩阵；

(3) 由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重；

(4) 计算各层元素对于系统目标的合成权重，并进行排序。

下面分别说明这 4 个步骤的实现过程。

7.2.1 递阶层次结构的建立

应用 AHP 分析社会的、经济的以及科学管理领域的问题，首先要把问题条理化、层次化，构造出一个层次结构模型。在这个结构模型下，复杂的问题被分解为我们称之为元素的组成部分，这些元素又按其属性分成若干组，形成不同层次，上一层次元素作为准则对下一层次的某些元素起支配作用，同时它们又受上一层次某个或某些元素的支配，这些层次大体上可分为以下三类。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(1) 最高层

这一层次中只有一个元素，一般它是分析问题的预定目标或理想结果，因此也称目标层。

(2) 中间层

这一层次包括为了实现目标所涉及的中间环节，它可以由若干个层次组成，包括所需考虑的准则、子准则，因此也称为准则层。

(3) 最底层

表示为实现目标可供选择的各种措施、决策方案等，因此也称为措施层或方案层。

递阶层次结构中各层次之间的支配关系不一定是完全的，即可以存在这样的元素，它并不支配下一层次所有元素而仅支配其中部分元素，这种自上而下的支配关系所形成的层次结构我们称为递阶层次结构(注意此时层次内部元素之间不存在支配关系)。一个典型的层次结构表示在图 7.1 上。

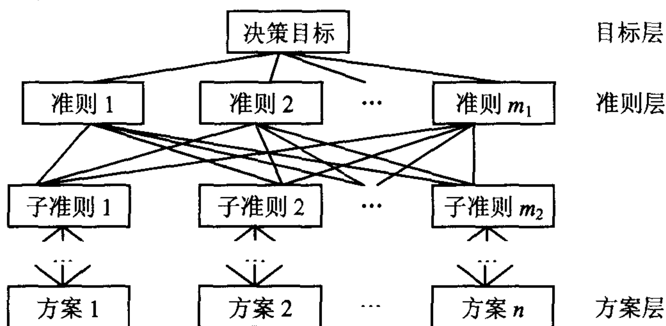


图 7.1　递阶层结构示意图

递阶层次结构中的层次数与问题的复杂性有关，一般地层次数可以不受限制，每个层次中各元素所支配的元素一般地不要超过 9 个，这是因为支配的元素过多会给下一步的两两比较判断带来困难。一个好的层次结构对于解决问题是至关重要的，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

它为获得良好的结果奠定了基础，因此必须反复讨论，反复斟酌。下面给出几个建立递阶层次结构的实例。

例 1 科研课题的选择

对于一个研究单位，科研课题的选择是组织管理的首要任务，课题选择的合适与否直接关系到科研单位贡献大小和发展方向，选题必须考虑到贡献大小、人才培养、具有可行性以及对本单位今后发展的影响等四个准则，而与这四个准则相联系的主要因素又有：①实用价值；②科学意义；③优势发挥；④难易程度；⑤科研周期；⑥财政支持等。根据这些因素的隶属支配关系，将它们自上而下划分为四个层次，图 7.2 表示了这一问题的层次结构模型。

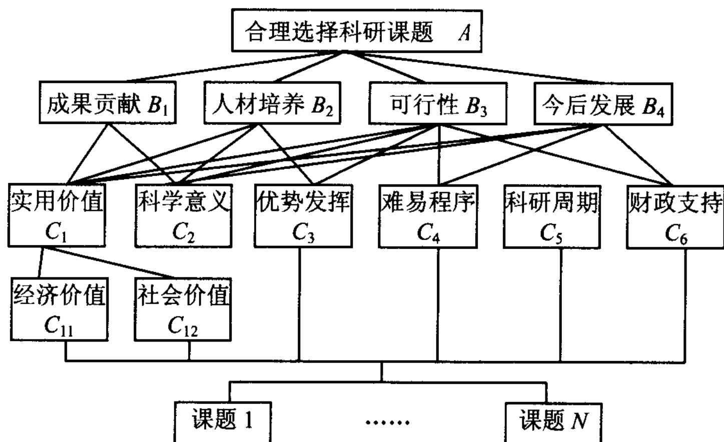


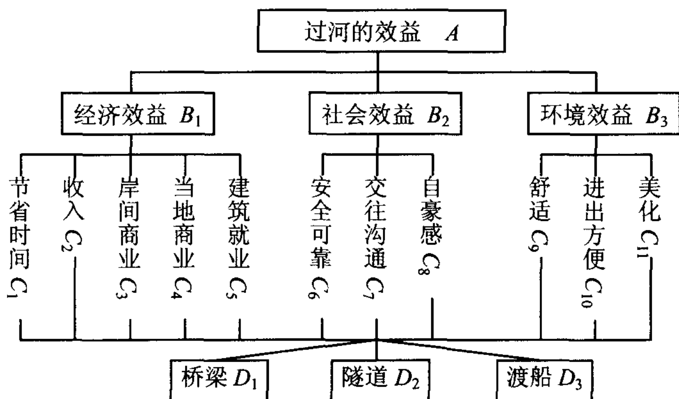
图 7.2 选择科研课题的层次结构模型

例 2 设某港务局要改善一条河道的过河运输条件，需要确定是否修建桥梁或隧道以代替现有的轮渡。

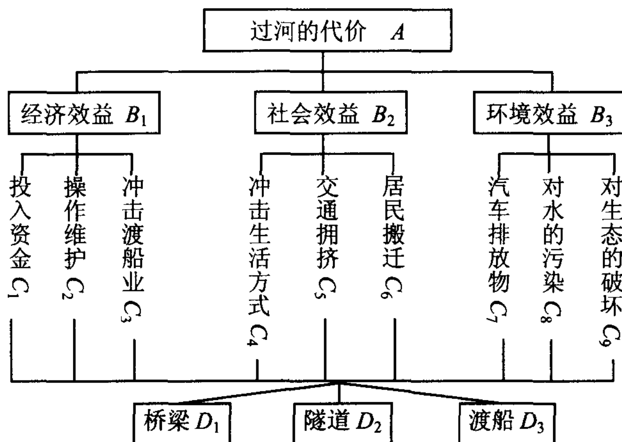
在此问题中过河方式的确定取决于过河方式的效益与代价。通常我们用费效比($\frac{效益}{代价}$)作为选择方案的标准。为此分别

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

给出了两个层次结构(图 7.3)，它们分别考虑了影响过河的效益与代价的因素。这些因素可分为三类：经济的、社会的和环境的。决策的制定将取决于根据这两个层次结构确定的方案的效益权重与代价权重之比。



(a) 过河效益层次结构



(b) 过河代价层次结构

图 7.3 过河的效益与代价层次结构

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.2.3 构造两两比较判断矩阵

在建立递阶层次结构以后，上下层元素之间的隶属关系就确定了，假定以上一层的元素 C_1 为准则，所支配的下一层次的元素为 u_1，u_2，…，u_n，我们的目的是要按它们对于准则 C_1 的重要性赋予 u_1，u_2，…，u_n 相对权重。当 u_1，u_2，…，u_n 对于 C_1 的重要性可以直接定量表示时(如利润值、材料消耗量等)，它们相应的权重可以直接确定，但对于大多数社会经济问题，特别是比较复杂的问题，元素的权重不易直接确定，这时就要有适当方法导出它们的权重。所用的导出权重的方法就是两两比较的方法。所用的标度是比例标度法。

在这一节中，决策者要反复回答问题，针对准则 C，两个元素 u_i 和 u_j，哪一个更重要？重要多少？并按 1～9 比例标度对重要性程度赋值。表 7.1 中列出了 1～9 标度的含义。例如图 7.3 上过河效益下支配的元素为经济效益、社会效益和环境效益。如果认为经济效益比社会效益明显地重要，那么它们的重要性之比的标度应取为 5。反之，社会效益与经济效益之比应取为 $\frac{1}{5}$。这样对于准则 C，n 个被比较元素构成了一个两两比较判断矩阵

表 7.1 1～9 标度的含义

标度	含义
1	表示两个元素相比，具有同样重要性
3	表示两个元素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个元素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个元素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个元素相比，前者比后者极端重要
2，4，6，8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若元素 i 与元素 j 的重要性之比为 a_{ij}， 那么元素 j 与元素 i 重要性之比为 $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$A=(a_{ij})_{n\times n} \tag{7.1}$$

其中 a_{ij} 就是元素 u_i 与 u_j 相对于准则 C 的相对重要性之比。

显然，判断矩阵具有下述性质：

(1) $a_{ij}>0$

(2) $a_{ji}=\dfrac{1}{a_{ij}}$　　$i,\ j=1,\ \cdots,\ n$　　(7.2)

(3) $a_{ii}=1$

我们称判断矩阵 A 为正互反矩阵，它所具有的性质式(7.2)，使我们对一个 n 个元素的判断矩阵仅需给出其上(或下)三角的 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个元素就可以了，也就是说只需作 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个判断。

在理想状态下，判断矩阵 A 的元素具有传递性，即满足等式

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik} \tag{7.3}$$

例如当 u_i 与 u_j 相比的重要性之比为 3，而 u_j 与 u_k 重要性之比为 2，如果又认为 u_i 与 u_k 的重要性之比为 6 时，那么它们之间的关系就满足了传递性。当式(7.3)对于 A 的所有元素均成立时，那么 A 就称为一致性矩阵。但一般地我们并不要求判断矩阵的元素满足这种传递性要求。事实上，对矩阵的完全一致性要求是不切实际的。

关于判断矩阵有些问题尚需作一些进一步说明，即为什么要用两两比较？为什么要用 1～9 比例标度？为什么要限制被比较个数不要超过 9 个以及作 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个比较是否必要等。

分析社会经济系统不难看出，许多被测对象只具有相对性质，因而难以用同一种绝对标度进行衡量。诸如安全、幸福、进步等概念很难有一个绝对标准，只能在比较中显示优劣。这提示我们，在社会的、经济的以及一些类似问题的某些属性的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

测度中可以考虑采用一种相对标度。层次分析法所采用的两两比较判断矩阵正是一种既能量测各种属性优劣又能充分利用专家的经验和判断的相对标度法。它的应用使系统从无结构向结构化和次序化转化，因而不能不认为是系统分析中的一大突破。

在判断矩阵的建立上，层次分析法采用了 1～9 比例标度。这是由于这种比例标度比较符合人们进行判断时的心理习惯。首先我们认为参与比较的对象对于它们所从属的性质或准则有较为接近的强度，否则比较判断的定量化就会失去意义。例如用 1 千米与 1 厘米相比，显然是没有多大意义的。因而，比例标度范围不必过大，如果出现强度在数量级上相差过于悬殊的情形，可以将数量级小的那些对象适当合并，或将数量级大的对象分解，使强度保持在接近的数量级上，然后再实施两两比较。

其次研究人们比较判断习惯的特点，人们通常用相等、较强(弱)、明显强(弱)、很强(弱)、绝对强(弱)这类语言来表达两个因素的某种属性的比较。如果再分细些，可以在相邻两级中再插入一级，这样正好是 9 级，因而用 9 个数字来表达强弱是恰当的。而且显然地这种判断具有互反性，即若甲与乙重要性之比为 9，则乙与甲重要性之比为 $\frac{1}{9}$。那么能否取 1～9 之间的非整数作为比例值呢？一般地说没有必要。对于一个难以定量的对象提供一个过于精确的标度显然是事倍功半的。当然当事物的属性强度十分接近时，也可采用其他标度，例如 1.1～1.9 标度。表 7.2 给出了各种标度间转换的参考关系。

上面提到，一般地一个准则下，被比较对象不要超过 9 个。这是心理学研究的一个结论。实验心理学表明，普通人在对一组事物的属性作比较，并使判断基本保持一致时所能正确辨别事物的个数在 5～9 之间。其极限个数为 9，而这恰好与 9 级标

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 7.2 标度转换

标度	范围	相等	中间	弱强	中间	强	中间	很强	中间	绝对强
(1)	1～3	1	2	2	2	2	3	3	3	3
(2)	1～5	1	2	2	3	3	4	4	5	5
(3)	1～7	1	2	2	3	4	5	6	6	7
(4)	1～9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(5)	1～11	1	3	4	5	7	8	9	10	11
(6)	1～13	1	3	4	6	7	9	10	12	13
(7)	1～17	1	3	5	7	9	11	13	15	17
(8)	1～26	1	5	8	11	14	17	20	23	26
(9)	1～90	1	20	30	40	50	60	70	80	90
(10)	0.9	相应 1～9 标度值的 0.9 倍								
(11)	0.7	相应 1～9 标度值的 0.7 倍								
(12)	0.3	相应 1～9 标度值的 0.3 倍								
(13)	0.1	相应 1～9 标度值的 0.1 倍								
(14)	$1+0.x$	这里的 x 相应 1～9 标度值								
(15)	$3+0.x$	这里的 x 相应 1～9 标度值								
(16)	$\sqrt{x}$	这里的 x 相应 1～9 标度值								
(17)	x^2	这里的 x 相应 1～9 标度值								
(18)	x^5	这里的 x 相应 1～9 标度值								
(19)	$x^{n/2}$	$2^0=1$	$2^{0.5}=1.414$	$2^1=2$	$2^{1.5}=2.828$	$2^2=4$	$2^{2.5}=5.657$	$2^3=8$	$2^{3.5}=11.31$	$2^4=16$
(20)	$9^{x/8}$	1	$9^{1/8}$	$9^{2/8}$	$9^{3/8}$	$9^{4/8}$	$9^{5/8}$	$9^{8/8}$	$9^{7/8}$	9

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

度相应。因而，限制判断矩阵阶数不超过 9 是有实验根据的。

为了获得判断矩阵，我们需作 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次两两判断。有人认为，只要把所有元素逐个与某个元素作比较，即只作 $n-1$ 次比较就可获得排序向量。这种做法的弊病在于，任何一个判断的失误，均可导致不合理的排序。而这种失误对于难以定量的系统又是很有可能发生的。而进行 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次比较可以提供更多的信息，通过各种不同角度的反复比较从而导出一个更合理的排序。

7.2.3 单一准则下元素相对权重计算

在这一步我们要根据 n 个元素 u_1，…，u_n 对于准则 C 的判断矩阵求出它们对于准则 C 的相对排序权重 w_1，…，w_n。写成向量形式为 $W=(w_1, \cdots, w_n)^T$

存在着各种不同的计算权重的方法，主要有以下几种：

(1) 和法

对于一个一致的判断矩阵，它的每一列归一化后就是相应的权重向量，当 A 不一致时，它们是近似权重向量。和法采用这 n 个列向量的算术平均作为权重向量，即有

$$w_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}a_{kj}}\right) \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{7.4}$$

与和法类似地还可用公式

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$w_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}}\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{7.5}$$

进行计算。

(2) 根法

如果我们将 A 的各个列向量用几何平均然后再归一化，这就是根法得到的权重向量，即有

$$w_i=\frac{\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{kj}\right)^{\frac{1}{n}}} \tag{7.6}$$

上述两种方法均适合于手算或粗估。

(3) 对数最小二乘法(LLSM)

用拟合方法确定权重向量 $W=(w_1,\ \cdots,\ w_n)^T$,使残差平方和

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\log a_{ij}-\log\frac{w_i}{w_j})^2 \tag{7.7}$$

为最小。这就是对数最小二乘法，简记为(LLSM)。可以证明对数最小二乘法的结果与根法相同。

(4) 最小二乘法(LSM)

确定权重向量 $W=(w_1,\ \cdots,\ w_n)^T$，使残差平方和

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ij}-\frac{w_i}{w_j})^2 \tag{7.8}$$

为最小的方法称为最小二乘法，记为 LSM．最小二乘法由于需

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

要解一组非线性方程，故在实际中应用较少。

(5) 特征根法(EM)

设 $W=(w_1, \cdots, w_n)^T$ 是由 n 阶判断矩阵得到的权重(即排序)向量。当 A 是一致性矩阵时，A 应为

$$A=\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

该矩阵的秩为 1，满足

$$AW=nW \tag{7.10}$$

这里 n 是 A 的最大特征值，W 是 A 的属于特征值 n 的特征向量，A 的其他特征值均为零。对于判断矩阵 A，一般地是不一致的，但它是正矩阵，我们用 A 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量，即满足

$$AW=\lambda_{\max}W \tag{7.11}$$

的特征向量 W 作为近似排序向量。这种方法称为特征根法，简记为 EM。关于特征根方法的原理及其具体计算方法将在 7.4 节中进行讨论。

在这一步中，我们还应对判断矩阵的一致性程度，即判断矩阵的质量进行检验。前面已经提到，在判断矩阵构造中，并不要求判断具有传递性和一致性。这是由客观事物的复杂性与人的认识的多样性以及所用的标度限制所决定的。但要求判断有大体上的一致是应该的。出现甲比乙极端重要，乙比丙极端重要，而丙又比甲极端重要的判断一般是违反常识的。一个混乱的、经不起推敲的判断矩阵有可能引起决策的失误。而且当判断矩阵偏离一致性过大时，任何一种排序向量估算方法，其

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

结果的可靠性都是值得怀疑的。因此，需要对判断矩阵一致性进行检验，其检验步骤如下：

1) 计算一致性指标 C.I.

$$C.I.=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \tag{7.12}$$

2) 查找相应的平均随机一致性指标 R.I.，表 7.3 给出了 1～15 阶正互反矩阵的平均随机一致性指标。

表 7.3 平均随机一致性指标

矩阵阶段	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R.I.	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

3) 计算一致性比例 C.R.

$$C.R.=\frac{C.I.}{R.I.} \tag{7.13}$$

当 C.R.<0.1 时，认为判断矩阵的一致性是可以接受的，否则应对该判断矩阵作适当修正。

在这里，矩阵最大特征值 λ_{max} 除用特征根法计算外，还可用公式

$$\lambda_{max}\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{(AW)_i}{nw_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}w_j}{w_i} \tag{7.14}$$

计算。

7.2.4 计算各层元素对目标层的总排序权重

在 7.2.3 中得到的是一组元素对其上一层上某个元素的权重向量，称为单准则下的权重向量。我们最终要得到各元素特别是最底层中各方案对目标的排序权重，即所谓总排序权重向量，据此可进行方案选择。总排序权重要自上而下地将单准则下的权重进行合成。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

假定我们已经算出第 $k-1$ 层上的元素(设为 n_{k-1} 个)对于目标层的总排序权重向量 $W^{(k-1)}=(w_1^{(k-1)}, \cdots, w_{nk-1}^{(k-1)})^T$ 以及第 k 层上的元素(设为 n_k 个)对于 $k-1$ 层上第 j 个元素为准则的单排序向量 $P_j^k=(p_{ij}^{(k)}, \cdots, p_{nkj}^{(k)})^T$，$j=1, 2, \cdots, n_{k-1}$，其中不受 j 元素支配的元素权重取为零。矩阵

$$P^{(k)}=(p_1^{(k)}, \cdots, p_{nk-1}^{(k)})$$

是 $n_k \times n_{k-1}$；阶矩阵，表示了第 k 层上元素对 $k-1$ 层上各元素的排序，那么第 k 层上元素对目标的总排序 $W^{(k)}$ 为

$$W^{(k)}=(w_1^{(k)}, \cdots, w_{nk}^{(k)})^T=p^{(k)}W^{(k-1)} \tag{7.15}$$

写成分量为

$$w_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{n_{k-1}} p_{ij}^{(k)} w_j^{(k-1)} \qquad j=1,2,\cdots, n \tag{7.16}$$

因为

$$W^{(k-1)}=p^{(k-1)}W^{(k-2)}$$

由此递推可得

$$W^{(k)}=p^{(k)}p^{(k-1)} \cdots p^{(3)}W^{(2)} \tag{7.17}$$

这里 $W^{(2)}$就是第二层上元素对于目标的总排序，也是单准则下的排序向量。最后，我们将本节例 2 中过河方案的选择按上述各步骤予以完成。

首先在过河方式的效益层次结构中(图 7.3(a))对影响过河方法选择的经济因素来说，桥梁或隧道具有明显优越性，一方面有节省时间带来的效益，另外交通量的增加使过河费增收，又可引起岸间商业的繁荣，建筑施工又创造了就业机会，从社会效益看，桥梁和隧道比轮渡更安全，更有助于旅行和交往。从环境效益看，这两种方案更舒适，更方便。由此得到的判断矩阵如表 7.4(1)～表 7.4(15)所示。得到各方案对于效益的总排序权重为

$$W_{效益}=(0.57, 0.36, 0.07)^T$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

从效益看建造桥梁方案最佳。各矩阵大体上能满足一致性要求。与效益分析类似，可得各方案对代价的排序向量(判断矩阵略，参阅文献[8])，得到方案对于代价的总排序为

$$W_{代价}=(0.36，0.58，0.05)^T$$

各方案的$\dfrac{效益}{代价}$如下：

桥梁 $\dfrac{效益}{代价}=1.58$

隧道＝0.62

轮渡＝1.28

方案选择的准则应使$\dfrac{效益}{代价}$比最大。因此，应选择建造桥梁方案。

表 7.4(1)

A	B_1	B_2	B_3	$w^{(2)}$
B_1	1	8	6	0.61
B_2	1/3	1	2	0.22
B_3	1/6	1/2	1	0.11

C.I.＝0

表 7.4(2)

B_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$w_1^{(2)}$
C_1	1	1/3	1/7	1/5	1/6	0.04
C_2		1	1/4	1/2	1/2	0.09
C_3			1	7	5	0.54
C_4				1	1/5	0.11
C_5					1	0.23

C.I.＝0.14

表 7.4(3)

B_2	C_6	C_7	C_8	$w_2^{(3)}$
C_6	1	6	9	0.76
C_7		1	4	0.18
C_8			1	0.06

C.I.＝0.05

表 7.4(4)

B_3	C_9	C_{10}	C_{11}	$w_1^{(3)}$
C_9	1	1/4	9	0.25
C_{10}		1	8	0.69
C_{11}			1	0.06

C.I.＝0.07

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 7.4(5)

C_1	D_1	D_2	D_3	$w_1^{(4)}$
D_1	1	2	7	0.58
D_2		1	6	0.35
D_3			1	0.07

C.I.=0.02

表 7.4(6)

C_2	D_1	D_2	D_3	$w_2^{(4)}$
D_1	1	1/2	8	0.36
D_2		1	9	0.59
D_3			1	0.05

C.I.=0.02

表 7.4(7)

C_2	D_1	D_2	D_3	$w_3^{(4)}$
D_1	1	4	8	0.69
D_2		1	6	0.25
D_3			1	0.06

C.I.=0.07

表 7.4(8)

C_4	D_1	D_2	D_3	$w_4^{(4)}$
D_1	1	1	6	0.46
D_2		1	6	0.46
D_3			1	0.08

C.I.=0

表 7.4(9)

C_5	D_1	D_2	D_3	$w_5^{(4)}$
D_1	1	1/4	9	0.41
D_2		1	9	0.54
D_3			1	0.05

C.I.=0.011

表 7.4(10)

C_6	D_1	D_2	D_3	$w_6^{(4)}$
D_1	1	4	7	0.59
D_2		1	6	0.35
D_3			1	0.06

C.I.=0.09

表 7.4(11)

C_7	D_1	D_2	D_3	$w_7^{(4)}$
D_1	1	1	5	0.46
D_2		1	5	0.46
D_3			1	0.09

C.I.=0

表 7.4(12)

C_8	D_1	D_2	D_3	$w_8^{(4)}$
D_1	1	5	3	0.64
D_2		1	1/3	0.11
D_3			1	0.26

C.I.=0.02

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 7.4(13)

C_9	D_1	D_2	D_3	$w_9^{(4)}$
D_1	1	5	8	0.73
D_2		1	5	0.21
D_3			1	0.06

C.I.=0.07

表 7.4(14)

C_{10}	D_1	D_2	D_3	$w_{10}^{(4)}$
D_1	1	3	7	0.64
D_2		1	6	0.29
D_3			1	0.07

C.I.=0.05

表 7.4(15)

C_{11}	D_1	D_2	D_3	$W_{11}^{(4)}$
D_1	1	6	1/5	0.27
D_2		1	1/3	0.10
D_3			1	0.63

C.I.=0.31

7.3 有向图及可达性

为了进一步讨论递阶层次结构，本节介绍图论中的一些与此有关的基本概念。

7.3.1 图的基本概念

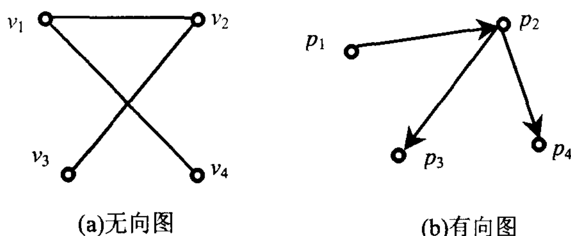
图是自然科学各领域中经常需要研究的对象。一个图可以用图形表示。它由两部分组成，一部分是一些点，称之为结点；另一部分是连接这些点的线，称之为边，如图 7.4 所示。

定义 7.1 图 G 是非空结点集 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 以及边集 $E=\{l_1,\cdots,l_m\}$ 所组成。其中每条边都可用一个结点对表示，即

$$l_i=(v_j,\ v_k) \qquad i=1,\cdots,m, \qquad v_j,\ v_k\in V$$

v_j、v_k 称为 l_i 的两个端点。这样的一个图 G 可用 $G=\langle V,\ E\rangle$ 表示。一个具有 m 条边，n 个结点的图称为$(n,\ m)$图。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net



(a)无向图　　(b)有向图

图 7.4　图的表示

例如有 4 个城市 v_1、v_2、v_3、v_4，其中 v_1 与 v_2、v_1 与 v_4、v_2 与 v_3 间有直达长途电话线，此事实用图的方式表示。图中结点集为 $V=\{v_1, \cdots, v_4\}$，边集为 $\{l_1, l_2, l_3\}$，见图 7.4(a)。其中 $l_1=(v_1, v_2)$，$l_2=(v_1, v_4)$，$l_3=(v_2, v_3)$。在此例中，两个城市间的电话线是双向的，这表示 (v_1, v_2) 与 (v_2, v_1) 有相同的含义，即与结点的次序无关，称为无向边。

在有些情形下，边与结点对方向有关，例如有 4 个程序 p_1、p_2、p_3、p_4，p_1 能调用 p_2；p_2 能调用 p_3，p_4 此事实用图表示为 $V=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$，$E=\{l_1, l_2, l_3\}$，其中 $l_1=(p_1, p_2)$,$l_2=(p_2, p_3)$，$l_3=(p_2, p_4)$，且结点对的次序不能变换，这种边称为有向边，边 $l_k=(v_i, v_j)$ 的方向由 v_i 指向 v_j，v_i 称为的起点，v_j 称为终点，如图[7.4(b)]所示。

所有边均为有向边的图称为有向图，所有边均为无向边的图称为无向图。

边 $l_k=(v_i, v_j)$ 无论 l_k 是否为有向边，均称 l_k 与 v_i、v_j 相关联，并称 v_i 与 v_j 是邻接的。一条边若与两个相同的结点相关联，则称它为环，即环是具有 (v_i, v_i) 状的边。如果若干条边同关联于一个结点，则称这些边是邻接的，图 7.5(b)中边 $l_k=(v_1, v_1)$ 就是一个环。而(a)中边 (v_1, v_2)，(v_1, v_3)，(v_1, v_4) 是邻接边。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

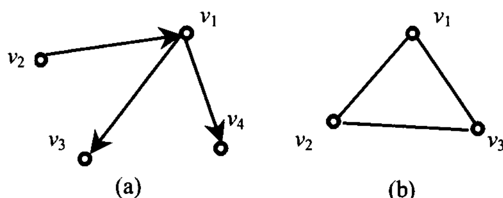


图 7.5　邻接边与环

两个图 $G=\langle V,E\rangle,G'=\langle V',E'\rangle$，若有 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$ 则称 G'为 G 的子图，若进一步有 $E'\neq E$，则称 G'为 G 的真子图。

一个具有 n 个结点、m 条边的$(n，m)$图 G，如果它的 n 个结点$(n\geqslant 2)$中每一个均与其余 $n-1$ 个结点相邻接，则此图称为完全图,否则为非完全图。$(n，0)$图称为零图,此时图中的点均为孤立点。容易证明在完全图中有关系 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

在有向图中以 v_i 结点为起点的边的条数称为 v_i 的引出次数，记为 $\overrightarrow{\deg}(v_i)$。以 v_i 为终点的边的条数称为 v_i 的引入次数，记为 $\overleftarrow{\deg}(v_i)$，两者之和称为 v_i 的次数，记为 $\deg(v_i)$。任一有向图的所有结点次数之和必为偶数,且为图中边数的两倍，即有

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$$

在有向图中，一般一对结点只对应一条边，此时通过两个相同结点但方向不同的边是看成与两个不同结点对对应的。有时两个结点对之间可以有多条邻接边，这种边称为多重边；不包含多重边的图称为简单图，反之称为多重图。图 7.6 中(a)、(b)为多重图，(c)为简单图。有时图中直接用数字 1，2，…表

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

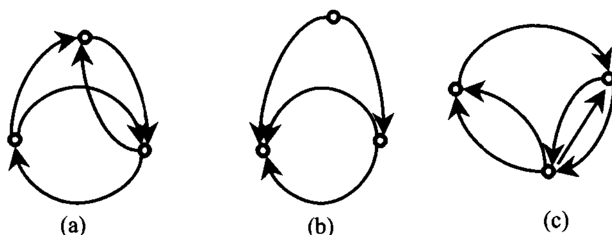


图 7.6　多重图与简单图

示结点 v_1，v_2，…，以后在不会混淆时也常常这样表示。我们今后要讨论的主要是简单图。

有时在一个图的边的旁侧可附加一些数字，以此刻画此边的某些数字特征，例如可用来表示距离等，这些数字称为边的权，而这些边称为有权边，带有有权边的图称为有权图，如图 7.7 就是一个有权图。

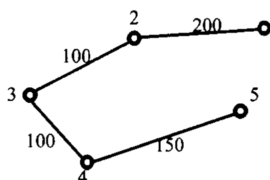


图 7.7　有权图

7.3.2　通路与回路

设有向图 $G=<V, E>$，考虑图中边的序列：

$$(v_{i1},\ v_{i2}),(v_{i2},\ v_{i3}),\cdots,(v_{ik-1},\ v_{ik})$$

这个序列由 v_{i1} 开始到 v_{ik} 结束。其中每条边的终点是下一条边的起点。这样的边列可简单地写成$(v_{i1},\ v_{i2},\ \cdots,\ v_{ik})$，并允许在序列中多次出现相同的结点与边。这种边列称为有向图的一条通路，而 v_{i1} 与 v_{ik} 则分别称为该通路的起点与终点。通路中边的数目称为通路的长度。图 7.8 中起始于结点 1、终止于结点 3 的通路有 P_1：(1，2，3)，P_2：(1，4，3)，P_3：(1，2，4，3)，P_4：(1，2，4，1，2，3)，P_5：(1，2，4，1，4，3)，P_6：(1，1，2，3)。其中各点均不相同的通路称为基本通路，例如 P_1、P_2、

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

P_3 已就是基本通路。

如果图的一条通路的初始结点与终止结点相同，则称为回路。中间各点都不相同的回路称为基本回路，例如图 7.8 中的 C_1: (1，1)，C_2: (1，2，1)，C_3: (1，2，3，1)，C_4: (1，4，3；1)，C_5: (1，2，3，2，1)，C_6: (1，2，3，2，3，1)都是回路，其中 C_1、C_2、C_3、C_4 为基本回路，回路 C_1 为一个环。

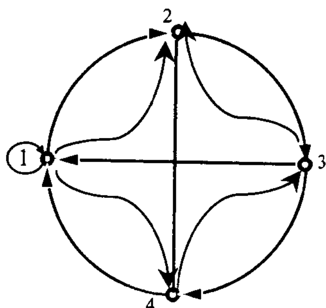


图 7.8 图的通路与回路

任一通路中如果删去所有回路则必得基本通路，例如从上面 P_5 中删去回路(1，2，4，1)，同时保留其起始点，则得基本通路 P_2，同理从任一回路中删去其余回路，同时保留其起始结点必得基本回路。例如从 C_5 中删去回路(2，3，2)，保留起始结点 2 得基本回路 C_2。

定理 7.1 一个有向(n, m)图中，任何基本通路的长度均小于或等于 $n-1$，任何基本回路长度均小于或等于 n。

证明 在基本通路中各结点均不相同，在长度为 k 的基本通路中，不同结点的个数为 $k+1$，在(n, m)图中基本通路中结点数不超过 n，故其长度不超过 $n-1$，基本回路的结点数最多为 $n+1$，故其长度不超过 n。

由此可知，如果我们仅仅对基本通路及基本回路感兴趣，那么可以将研究限于长度不超过 n 的通路和回路上就可以了。

7.3.3 可达性与连通性

定义 7.2 从有向图的一个结点 v_i 到另一个结点 v_j 间如果存在着一条通路，则称 v_i 到 v_j 是可达的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

当然 v_i 到 v_j 是可达的，并不表示它们之间只有一条通路。这些通路中最短的通路称为短程线，短程线的长度称为 v_i 到 v_j 的距离，用 $d(v_i, v_j)$表示。

定义 7.3 一个无向图，如果它的任何两结点间均是可达的则称此图为连通图，否则称为非连通图。一个有向图 G，如果忽略其边的方向后得到的无向图是连通的，则称此有向图为连通的，否则称为非连通的。

定义 7.4 一个有向连通图 G，如果其任意两结点间均是互相可达的，则称 G 为强连通的；如果其任何两结点至少有一向是可达的，则称图 G 为单向连通的；如果忽略边的方向后其无向图是连通的，则称图 G 是弱连通的，图 7.9 上表示了各种连通图与非连通图。

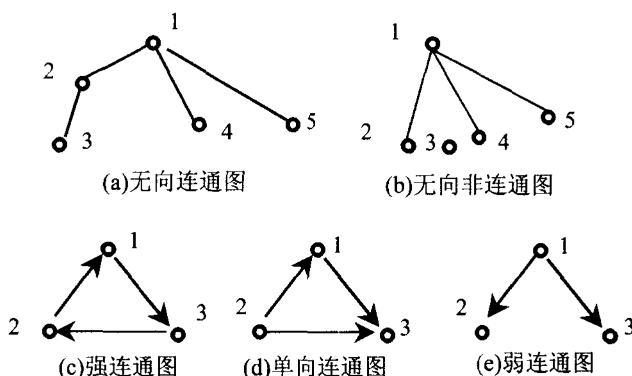


图 7.9 连通图与非连通图

7.3.4 有向图的矩阵表示法

图的图形表示法由于比较直观明了，故在比较简单情形下有一定优越性，但对于比较复杂的图，这种表示法就不太方便了。而用矩阵表示图却有很多优点，它不仅简单、方便，还可

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

以将图的问题进行数学处理，因而得到广泛应用。

(1) 有向图的邻接矩阵

设有向图 $G=<V, E>$，$V=\{v_1, \cdots, v_n\}$，$E=\{l_1, \cdots, l_m\}$。假设 V 中各结点按一定顺序排列，不妨设按自然数顺序排列，并为简单起见，直接用结点标号 i 代表结点 v_i $i=1, \cdots, n$。这时可构造一个矩阵 $A(a_{ij})$其元素为

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i, v_j)\in E \\ 0 & (v_i, v_j)\notin E\end{cases} \tag{7.18}$$

那么矩阵 $A=(a_{ij})$称为图 G 的邻接矩阵。

一个图的邻接矩阵完整地刻画出图中各结点的邻接关系，并且可由矩阵对角元素是否为 1，辨别图上是否有环。图 7.10 所对应的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

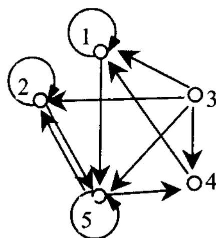


图 7.10 有向图

一个邻接矩阵的元素全为零，那么它对应的图为零图。若邻接矩阵除对角元素外全为 1，则对应一个完全图。

例 1 在图 $G=<V, E>$中，$V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$E=\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$。如图 7.11 所示，那么它的邻接矩阵为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

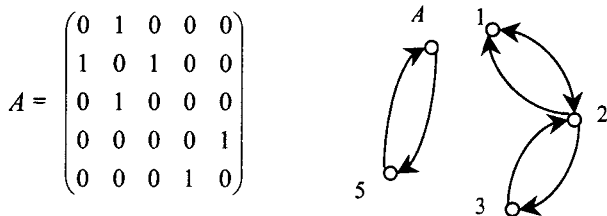


图 7.11 图 $G=\langle V,E\rangle$

从矩阵中可以看出，从结点 1 出发长度为 2 的回路只有一条，结点 1 到结点 2 有 2 条长度为 3 的通路，结点 1 到结点 4 没有通路等，这些都可从图 7.11 上直接予以验证。

7.4 递阶层次结构的建立

7.4.1 层次结构类型

递阶层次结构是 AHP 中应用十分广泛的结构形式，其中最常用、最简单的形式是内部独立的递阶层次结构。此外，比较复杂的层次结构有内部依存的递阶层次结构、反馈层次结构、循环层次结构以及更复杂的无层次的网络结构(简称 ANP)。图 7.12 中给出了各种结构的示意图。本书主要讨论递阶层次结构，尤其是内部独立的递阶层次结构。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

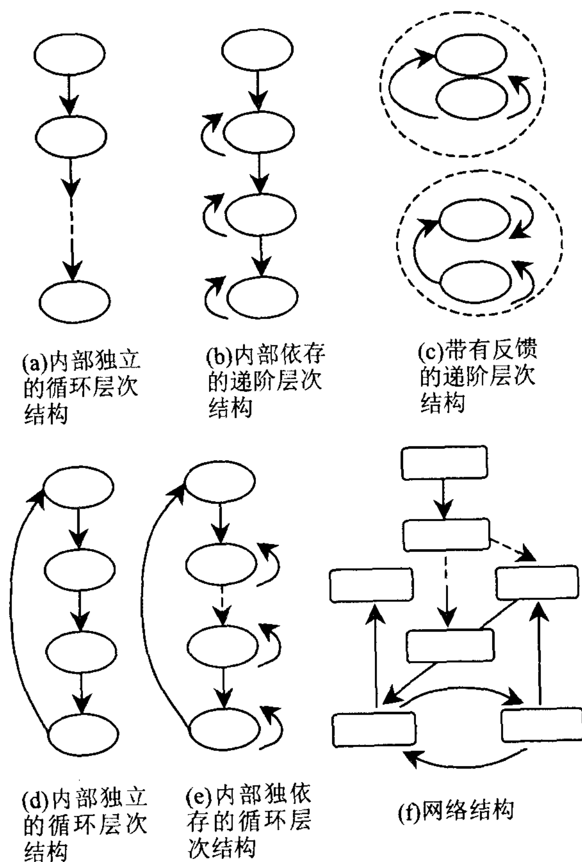


图 7.12　层次结构示意图

7.4.2　(内部独立的)递阶层次结构的定义

定义 7.5　带有二元关系“≤”的集合称为有序集，如果“≤”满足

(1) 自反性：即对任意 $x \in E$ 有 $x \leq x$；

(2) 对称性：若 $x \leq y$，$y \leq x$ 则 $x = y$，x，$y \in E$；

(3) 传递性：若 $x \leq y$，$y \leq z$ 则 $x \leq z$，x，y，$z \in E$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这里我们称二元关系“$\leq$”为包含关系，即如果 $x\leq y$，则 y 包含 x 或称 x 从属于 y，关系 $x<y$ 表示 $x\leq y$ 且 $x\neq y$，当 $x<y$ 且不存在中间元素 t 使得 $x<t<y$ 中时，则称 x 属于受 y 支配的元素集合，即 y 支配 x。

一个有序集 S 如果对每个元素 $x,y\in S$ 或者有 $x\leq y$ 或者有 $y\leq x$，则称为是整体有序集。如果不是整体有序的，则是局部有序集。当 S 的元素个数有限时称为有限集。

在递阶层次结构中，我们规定下一层元素与上一层有直线相连的元素间的关系为“<”关系，并且用 x^+表示所有支配 x 的元素集合，用 x^-表示所有受 x 支配的元素集合，那么

$$x^- = \{y|x \text{ 支配 } y，y\in E\}$$
$$x^+ = \{y|y \text{ 支配 } x，y\in E\} \tag{7.19}$$

定义 7.6 局部有序集 E 称为是有最大元素的，如果存在一个元素 $b\in E$，使得每一个元素 $x\in E$ 都满足 $x<b$，那么 b 称为 E 的最大元素。

定义 7.7 设 H 是带有唯一最大元素 b 的有限的局部有序集，H 称为是一个内部独立的递阶层次结构，如果它满足：

(1) 存在的一个分划 $\{L_k\}$，$k=1, 2, \cdots, m$，其中 $L_1=\{b\}$，每个分划称为一个层次；

(2) 对于每个 $x\in L_k(1\leq k\leq m-1)$，$x^-$非空，且 $x^-\subseteq L_{k+1}$；

(3) 对于每个 $x\in L_k(2\leq k\leq m)$，x^+非空，且 $x^+\subseteq L_{k-1}$。

对于内部独立的递阶层次结构，我们一般就简称为递阶层次结构。

由上面定义我们不难推出递阶层次结构的几个性质：

(1) H 中任意一个元素一定属于一个层次，且仅属于一个层次，不同层次元素的交集是空集；

(2) 同一层次任意两个元素之间不存在支配或从属关系，层次内部独立；

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(3) $L_k(2\leqslant k\leqslant m)$中任意元素必然至少受 L_{k-1} 中一个元素支配，且只能受 L_{k-1} 中元素支配，同时 $L_k(1\leqslant k\leqslant m-1)$中每个元素至少支配 L_{k+1} 中一个元素，且只能支配 L_{k+1} 中元素；

(4) 属于不相邻的两个层次的任两个元素间不存在支配关系。

内部独立的递阶层次结构(简称递阶层次结构)示意图如图 7.12 所示。图 7.13 上的层次结构不是递阶层次结构，因为它的第二层上的元素 B_3 同时支配了两个层次上的元素 C_2、C_3 与 V_3。如果去除与 V_3 的连线，那么就得到一个递阶层次结构了。

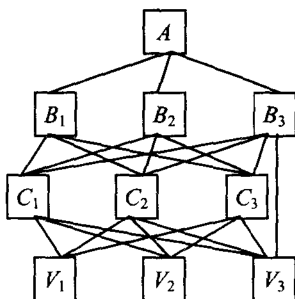
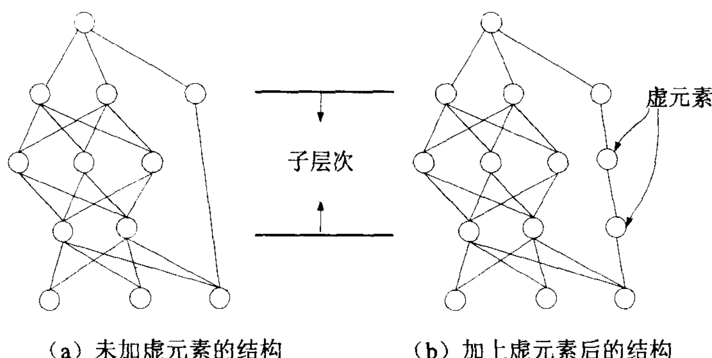


图 7.13　一个非递价层次结构

递阶层次结构的形式是多种多样的。一个层次结构称为是不完全层次结构，如果存在一个层次 $L_k(2\leqslant k\leqslant m)$中元素 x 使得 $x^{-}\neq L_{k+1}$，反之称为完全层次结构。还有一种包含子层次的递阶层次结构。层次 $L_{k+j}(j=1,2,\cdots,i-1)$称为子层次，如果在 L_k中存在元素 x，$x^{-}\not\subset L_{k+j}$，$j=1,2,\cdots,i-1$,而有 $x^{-}\subset L_{k+i}$。具有子层次的结构初看似乎不符合递阶层次结构的定义，因为递阶层次结构规定上一层元素只能支配下一层次元素。但实际上我们总可通过引入虚元素将它扩展成一个递阶层次结构，具体做法是在 $L_{k+j}(j=1,2,\cdots,i-1)$中各引入一个虚元素 $x^{(j)}=x$，使 $x^{-}=\{x^{(j)}\}$，$x^{(j)-}=\{x^{(j+1)-}\}$。我们也可把子层次看成隶属于 L_k的不独立层次。图 7.14(a)、(b)上是一个具有子层次的结构以及引入虚元素后的结构。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net



（a）未加虚元素的结构　　（b）加上虚元素后的结构

图 7.14　具有子层次的递阶层次结构

7.4.3 （内部独立的）递阶层次结构的确定

如果我们面临的是比较简单的决策问题，其决策因素不很多，相互间的从属与支配关系不难理顺，那么 AHP 的递阶层次结构的建立一般不会有困难。但如果决策因素很多，而它们之间的关系又很复杂，则单凭主观上的逻辑判断有时难以得到一个比较合理的层次结构。考虑到在一个复杂系统中，经过判断，各元素之间的从属关系是不难弄清的，主要的困难在于从错综复杂的关系中搞清层次与支配关系。我们可以通过有向图和可达性矩阵把这些关系理清。

设 H 是一个元素的包含或从属关系已经确定的点集，$H=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，用有向图表示系统各元素间的从属关系，有向边 $l_k=(v_i, v_j)$表示 v_j 从属于 v_i。有向图中引入次数为零的结点必位于第一层上，删去这些结点及由它们引出的边，剩下的有向图中引入次数为零的结点必位于第二层上，如此等等可得到分层图，然后将上下层中有从属关系的元素相连，就得到了相应的递阶层次结构。图 7.15(a)是一个系统的有向图，7.15(b)是其相应的递阶层次结构图。具体做法可参阅文献［8］。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

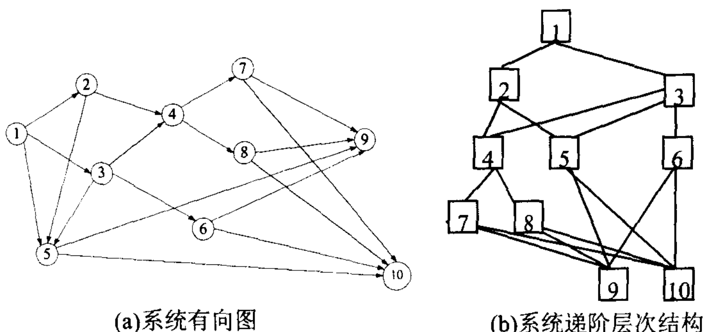


图 7.15 用有向图确定递阶层次结构

7.4.4 内部依存的递阶层次经过的确定

层次内部具有相互支配关系的递阶层次结构称为内部依存的递阶层次结构。图 7.16 给出了一个评价汽车行驶性能的层次结构。此结构中第二、三层内部元素是相互依存的，例如汽车刹车性能不仅与下层元素有关，而且也与同一层元素(转向，运行，加速性能)有关，因而这是一个内部依存的递阶层次结构。一个内部依存递阶层次结构须满足下面三个条件：

(1) 系统中元素能够聚合成层次，层次内部存在影响或支配作用，这种相互影响不能被忽略；

(2) 层次之间存在着自上而下的支配作用，因此存在一个对整个系统起支配作用的最高层次，也存在一个不支配任何其他层次上元素的方案层；

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

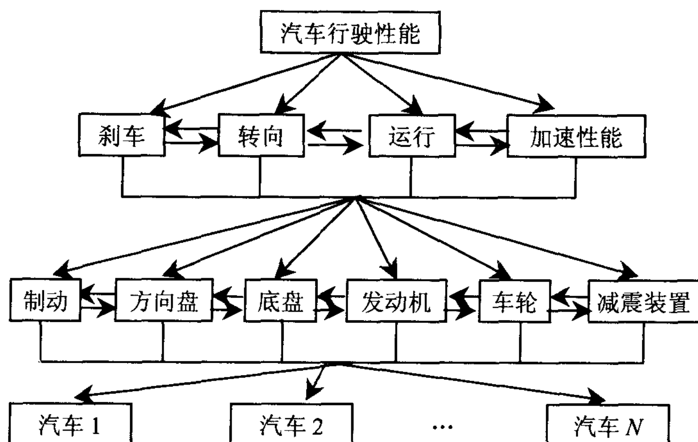


图 7.16　汽车性能评价层次图(内部依存递阶层次结构)

(3) 不存在层次之间的反馈支配作用。

图 7.17(a)是一个内部依存系统的有向图，图 7.17(b)是其相应的内部依存递阶层次结构图。

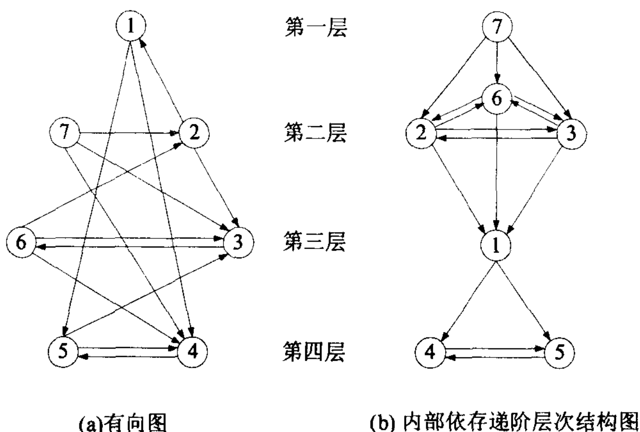


图 7.17　系统有向图与层次结构

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

研究内部依存的递阶层次结构对于具有反馈结构的系统有着特别重要的意义。这是因为实际决策问题中，一般都存在一个反映总体目标的最高层次，它支配着整个系统。在这种情况下，人们往往可以把一个带有层次间反馈的系统重新聚合成一个内部依存的递阶层次结构，如图 7.18(a)所示。即使对于循环结构，也可以增加一个控制元素使之成为内部依存的递阶层次结构(图 7.18(b))。

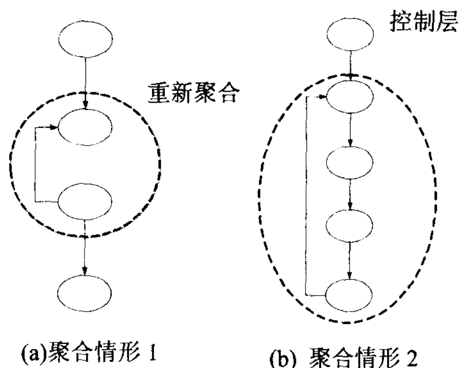


图 7.18 反馈系统聚合为内部依存的递阶层次结构

7.5 单准则下特征根方法及一致性检验

由单准则下的两两比较判断矩阵导出排序权重的方法很多，其中应用最广泛，又有重要理论意义的方法是特征根法。本节将对特征根方法所依据的 Perron—Frobenius 理论作扼要论述，并利用特征根方法进行判断矩阵一致性检验。

定义 7.8 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为 n 阶正互反矩阵，若其元素满足：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$a_{ij}>0,\ a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}},\qquad i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n \tag{7.20}$$

特别地 A 称为是一致性正互反矩阵，若其他元素还满足

$$a_{ij}=a_{ik}\,a_{kj}\quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{7.21}$$

对于一个一致的 n 阶正互反矩阵显然有特征根问题。

$$AW=nW \tag{7.22}$$

这里 $W=(w_1,\ \cdots,\ w_n)^T$，并且有

$$A=(a_{ij})=(\frac{w_i}{w_j}) \tag{7.23}$$

由两两比较得到的判断矩阵总是正互反矩阵，当这个矩阵一致时，它就是式(7.23)形式的矩阵。但由于各种原因，判断矩阵一般总是不一致的。前面已经未加证明地提到，当判断矩阵虽不一致，但具有满意的一致性时(这里常把一致性矩阵称为完全一致的，以区别具有满意一致性的矩阵)，特征根问题

$$AW=\lambda_{\max}W$$

得到的特征向量 W 归一化后就是排序向量的一个估计。这里 $\lambda_{\max}$ 是 A 的最大特征值。

特征根方法要能应用，必须在数学上阐明和解决以下两个问题：

(1) 如上所述一个一致性判断矩阵的模最大特征值必为正根，其值等于矩阵阶数 n，且重数为零，其余特征值均为零。此时对应的特征向量可为判断矩阵的任一列。对于不一致的判断矩阵来说，模最大的特征值是否为正根，其重数是否为 1，有无其他特征值与它的模相同？若存在模最大的正特征值，它所对应的特征向量是否可以由正分量组成？如果这些问题的答案是否定的或部分否定的，此时由特征根方法得到的排序向量

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

或者不存在，或者不唯一，或者具有负分量，故此方法必失效。20 世纪初，由 Perron 针对正矩阵提出的、接着又由 Frobenius 推广的非负矩阵特征值定理很好地解决了上述这些问题。

(2) 前面已提到，事实上，判断矩阵几乎是不可能完全一致的。当判断矩阵不一致时，由特征根方法得到的排序权重是元素实际排序权重的一个估计。那么这种不一致性对导出排序权重有多大影响？判断矩阵的满意一致性如何衡量？

7.5.1 Perron—Frobenius 定理

定义 7.9 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$称为非负矩阵，若其每个元素 $a_{ij}\geqslant 0(i,j=1，2，\cdots，n)$记做 $A\geqslant 0$；若对所有 i，j 均有 $a_{ij}>0$，则称 A 为正矩阵。n 维向量 $X=(x_1，\cdots，x_n)^T$称为非负向量，若它的每一个分量 $x_i\geqslant 0(i=1，\cdots，n)$记做 $X\geqslant 0$，若对所有 i 均有 $x_i>0$，则 X 为正向量，记作 $X>0$。

定义 7.10 n 阶矩阵按模最大特征值的模称为 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$，即有

$$\rho(A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i| \tag{7.24}$$

其中 $\lambda_i(i=1，2，\cdots，n)$为 A 的特征值。

$\rho(A)$必为正值，但 $\rho(A)$不一定是 A 的特征值，只有当 A 的模最大特征值为正根时 $\rho(A)$才一定是 A 的特征值。

定理 7.2(Perron) 设 n 阶方阵 $A>0$，$\rho(A)$为其谱半径，则

(1) $\rho(A)$必为 A 的特征值，而且它所对应的特征向量为正向量，即特征向量的每个分量具有相同符号；

(2) A 的任何一个其他特征值 λ 恒有

$$|\lambda|<\rho(A)$$

(3) $\rho(A)$为 A 的单特征值，因而它所对应的特征向量除差一个常数因子外是唯一的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Perron 定理说明，正矩阵的模最大特征值必为正根，且为单根，不存在其他与它模相同的特征值，这个最大特征值所对应的特征向量不计常数因子下是唯一的正向量。判断矩阵为正矩阵，故其最大特征值所对应的特征向量作为排序向量的近似，保证了排序向量的正值性与唯一性。

Perron 定理的证明比较冗长，在这里不再予以证明，有兴趣的读者可参阅文献[8]。

推论　正矩阵的任一正特征向量必属于它的最大特征值。

证明　设 X 是正矩阵 A 的一个属于特征值λ的特征向量，则有

$$AX=\lambda X \tag{7.25}$$

由 $A>0$ 知$(A^T)>0$，且 $\lambda_{max}(A^T)=\lambda_{max}(A)=\lambda_{max}=\rho(A)$，这里 λ_{max} 是 A 的最大特征值，设 A^T 的属于 $\lambda_{max}(A^T)$的特征向量为 Y，则由 Perron 定理知 $Y>0$，且

$$A^TY=\lambda Y$$

即

$$Y^TA=\lambda_{max}Y^T \tag{7.26}$$

式(7.25)两边左乘 Y^T 得

$$Y^TAX=Y^T\lambda X=\lambda Y^TX$$

同时由式(7.26)得到

$$Y^TAX=\lambda_{max}Y^TX$$

故

$$\lambda_{max}Y^TX=\lambda Y^TX$$

但 $Y^TX>0$，故 $\lambda=\lambda_{max}$。证毕。

当 A 为非负矩阵，即 $A\geqslant 0$ 且至少有一个元素为零时，定理 7.2 的结论(2)、(3)不一定成立，但定理 7.2 的全部论断容易推广到一类矩阵——素阵上。

定义 7. 11　设 $A\geqslant 0$，且存在一个正整数 $m>0$ 使得 $A^m>0$，则 A 称为素阵。例如矩阵

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

就是素阵，不难验证 $A^3>0$。

对于素阵有如下结论：

定理 7.3 若 A 为素阵，那么定理 7.2 的全部结论均成立。

定理可推广到更一般情形。

定义 7.12 设 A 为 n 阶方阵，若存在交换矩阵 P 使得

$$\mathrm{PAP}^T=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{pmatrix}$$

成立，其中 A_{11} 和 A_{22} 为两个低阶方阵，则称 A 是可约的，否则称 A 是不可约的。

显然正矩阵都是不可约的，对于不可约非负方阵给出下述定理：

定理 7.4 (Perron—Frobenius 定理)设 A 为 n 阶非负不可约方阵，则

(1) $\rho(A)$是 A 的特征值；

(2) $\rho(A)$对应的特征向量 $X>0$；

(3) 当 A 的任何一个元素增加时 $\rho(A)$增加；

(4) $\rho(A)$是 A 的单特征值。

简言之，几乎 Perron 定理的全部结论都适用于非负不可约矩阵，但 Perron 定理的结论(2)不再成立，即对于非负不可约矩阵，模最大的特征值可能不止一个。

定理 7.5 (广义 Perron 定理)设 A 为 n 阶非负矩阵，则 $\rho(A)$为 A 的特征值，它对应的特征向量 $Y\geq 0$。

由此可见对一般的非负方阵，定理 7.2(1)结论中的 $Y>0$ 改

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为 $Y\geqslant 0$，而结论(2)、(3)不再成立。

将上述正矩阵的性质用于判断矩阵，那么判断矩阵的模最大的特征值必为正、单根。而且它对应的特征向量必为唯一的正向量，这就为我们用特征根法研究问题提供了先决条件。

7.5.2 正矩阵最大特征向量的计算方法——幂法

代数学中对特征值问题

$$AX=\lambda_{\max}X$$

的求法是先求出 A 的特征多项式$|\lambda E-A|$的全部根，设其模最大的根为 $\lambda_{\max}$，然后解方程

$$(\lambda_{\max}E-A)X=0$$

求出对应特征值 $\lambda_{\max}$ 的特征向量(称为右主特征向量)。整个过程需解一个 n 元线性方程组，但这里我们只需求 A 的最大特征值及其对应的特征向量，同时 A 的正值性保证了最大正特征值和对应的特征向量的唯一性，因而可以由幂法进行计算。这里我们简单地介绍幂法的原理与计算步骤。

设 n 阶矩阵 A 的特征值为 λ_1，λ_2，…，λ_n 满足

$$\lambda_1>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$$

为简单起见，假设 A 有线性无关的特征向量系 V_1，V_2，…，V_n(对于一般情形的推导可参阅文献［8］)满足

$$AV_i=\lambda_iV_i \tag{7.27}$$

任取 n 维向量 X，则 X 可表示为

$$X=C_1V_1+C_2V_2+\cdots+C_nV_n \tag{7.28}$$

其中 C_1，C_2，…，C_n 为表出系数。式(7.28)两边左乘 A，得

$$AX=\lambda_1(C_1V_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}C_2V_2+\cdots+\frac{\lambda_n}{\lambda_1}C_nV_n)$$

继续迭代，即用 A 不断左乘上式两边，当 k 充分大时有

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$A^kX\approx\lambda_1{}^kC_1V_1,\quad A_1{}^{k+1}X\approx\lambda_1{}^{k+1}C_1V_1 \tag{7.29}$$

故 $A^{k+1}X$ 或 A^kX 的方向就是 V_1 的方向，而它们的第 i 个分量之比为

$$\frac{(A_1^{k+1}X)_i}{(A^kX)_i}\approx\lambda_1 \quad i=1,\cdots,n \tag{7.30}$$

特别地若有某个 j 使 $(A^kX)_j=1$，则 $(A_1{}^{k+1}X)\approx\lambda_1$，由此得到求正矩阵 A 的最大特征值及对应的特征向量计算步骤：

(1) 任取初始正向量 $X^{(0)}=(x_1{}^{(0)},\cdots,x_n{}^{(0)})^T$，令 $k=0$，选定允许误差 ε，计算 $m_0=\max_i\{x_i{}^{(0)}\}$ 并使 $Y^{(0)}=(y_1{}^{(0)},\cdots,y_n{}^{(0)})^T$ 满足 $Y^{(0)}=\dfrac{1}{m_0}X^{(0)}$（此时 $Y^{(0)}$ 的最大分量为 1）

(2) 迭代计算

$X^{k+1}=AY^{(k)}, M_{k+1}=\max_i\{x_i{}^{(k+1)}\}$（当 k 充分大时，即为 $X^{(k+1)}$ 对应于 $Y^{(k)}$ 分量为 1 的分量）

$$Y^{(k+1)}=\frac{X^{(k+1)}}{m_{k+1}}$$

(3) 检查 $|m_{k+1}-m_k|<\varepsilon$ 是否成立，若成立做(4)，否则令 $k+1\to k$ 转做(2)

(4) 将 $Y^{(k+1)}$ 归一化，即求

$$W\approx\frac{Y^{(k+1)}}{\sum_{i=1}^{n}y_i^{(k+1)}},\quad \lambda_{\max}\approx m_{k+1},$$

W 即为排序向量，$\lambda_{\max}$ 即为 A 的最大特征值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

例 用幂法计算判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 7\\ 1/5 & 1/7 & 1\end{pmatrix}$ 的排序权重向量，取 $\varepsilon=0.000\ 1$，初始向量 $X^{(0)}=(1，1，1)^T$，结果列于表 7.5。

最后得到 $\lambda_{max}=3.118\ 9$

$W=(0.541\ 5，0.381\ 6，0.076\ 9)^T$($W$ 也称为 A 的右主特征向量)。

表 7.5 本例的最大特征值计算

k	$x^{(k)T}$			$y^{(k)T}$			m_k
0	1	1	1	1	1	1	1
1	8.000	8.500 0	1.342 9	0.941 2	1	0.158 0	8.500 0
2	3.731 2	2.576 6	0.489 1	1	0.690 3	0.131 1	3.731 2
3	3.036 7	2.108 3	0.429 8	1	0.694 3	0.141 5	3.036 7
4	3.096 1	2.184 8	0.440 6	1	0.705 7	0.142 3	3.096 1
5	3.122 9	2.201 8	0.443 1	1	0.705 0	0.141 9	3.122 9
6	3.119 5	2.198 3	0.442 6	1	0.704 7	0.141 9	3.119 5
7	3.118 9	2.198 0	0.442 6	1	0.704 7	0.141 9	3.118 9
8	3.118 9	2.198 0	0.442 6	1	0.704 7	0.141 9	3.118 9

7.5.3 判断矩阵一致性条件及检验

定义 7.13 已经给出了完全一致性正互反矩阵的特点。除此以外，一致性正互反矩阵还具有下述特点：

(1) 若 A 一致，则 A^T 也一致；

(2) A 的任一行均为其他行的整数倍，从而秩(A)=1；

(3) A 的最大特征值 $\lambda_{max}=n$，其余特征值 λ_2，…，λ_n 均为零，即 $\sum\lambda_i=n$，其中 $\lambda_1=\lambda_{max}=n$

(4) 若 A 的属于 λ_{max} 的特征向量为 $W=(w_1,\cdots,w_n)^T$，则有

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$a_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}, i,j=1,2,\cdots,n;$

(5) 当 A 为判断矩阵时，它的归一化右主特征向量 $(w_1,\cdots,w_n)^T$ 即为排序向量。

定理 7.6 n 阶正互反矩阵 $A=(a_{ij})$是一致的，当且仅当 $\lambda_{\max}=n$。

证明　必要性由性质(3)直接可得，只需证充分性。设 $\lambda_{\max}=n$ 是 A 的最大特征值，它所对应的特征向量为 $W=(w_1,\cdots,w_n)^T$，那么有

$$\lambda_{\max}w_i=\sum_i a_{ij}w_i \quad i=1,2,\cdots,n$$

故
$$\sum_i \lambda_{\max}=\sum_i\sum_i a_{ij}\frac{w_j}{w_i}$$

利用 $a_{ii}=1$ 及 $a_{ji}=\dfrac{1}{a_{ij}}$ 得到

$$n\lambda_{\max}-n=\sum_i\sum_j a_{ij}\frac{w_j}{w_i}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ij}w_jw_i^{-1}+a_{ij}^{-1}w_iw_j^{-1}) \quad (7.31)$$

式(7.31)中通项

$$a_{ij}w_jw_i^{-1}w_j+\frac{1}{a_{ij}}w_j^{-1}w_i\geqslant 2 \quad (7.32)$$

当且仅当

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$a_{ij}w_jw_i^{-1}w_j=\frac{1}{a_{ij}}w_j^{-1}w_i=1 \tag{7.33}$$

时，式(7.32)右端取到最小值 2。

当 $\lambda_{\max}=n$ 时，式(7.31)左端为

$$n\lambda_{\max}-n=n^2-n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2$$

此式成立的充分必要条件是式(7.31)右端和号内每项均取到最小值 2，故式(7.33)成立，即有

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

必满足

$$a_{ij}=\frac{a_{ik}}{a_{jk}}\qquad i,j,k=1,2,\cdots,n$$

从而 A 是一致的。

推论　判断矩阵 A 不一致时有 $\lambda_{\max}>n$

证明　由式(7.31)知

$$n\lambda_{\max}=n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}w_jw_i^{-1}+a_{ij}^{-1}w_iw_j^{-1}>n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2$$

$$=n+n^2-n=n^2$$

$$故\ \lambda_{\max}>n$$

当判断矩阵不完全一致时，它可以看成一个一致性矩阵的元素受到某种扰动同时又保持互反性得到的矩阵。设 $A=a_{ij}$ 是正互反矩阵，$W=(w_1,\cdots,w_n)^T$ 是它对应于 $\lambda_{\max}$ 的特征向量，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

那么 A 可看成是一致性矩阵 $A^*=\dfrac{w_i}{w_j}$ 受小扰动得到的矩阵，即

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}>0，且\ \varepsilon_{ji}=\frac{1}{\varepsilon_{ij}},$$

当 $\varepsilon_{ij}=1$，$i,j=1,2,\cdots,n$ 时 A 就是一致性矩阵，此时 $\sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i=0$，

当 ε_{ij} 不全为零时，必定有 $\sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i\neq 0$，且 $\sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i$ 的绝对值越大(其值必为负，因为 $\lambda_{\max}>n$)，偏离一致性越远，因而值

$$\mu=\frac{-1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i$$

就可以看成 A 偏离一致性程度的一个衡量指标，因为

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_{\max}+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i=n$$

从而有

$$\mu=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{7.34}$$

μ 是一个正值。当 $\mu=0$ 时 A 是一致的，μ 越大 A 越偏离一致性。下面的定理进一步给出了 μ 的大小与 A 的元素受扰动的大小的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

关系。

定理 7.7 若正互反矩阵 A 的元素 $a_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}\ i,j=1,2,\cdots,n$, $W=(w_1,\cdots,w_n)^T$ 为 A 的右主特征向量，那么

$$\mu=-1+\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{1\le i<j\le n}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right) \tag{7.35}$$

证明 将 $a_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$ 代入(7.31)式得

$$\lambda_{\max}-1=\frac{1}{n}\left(\sum_{1\le i<j\le n}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right)$$

故

$$\mu=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=-1+\frac{\lambda_{\max}-1}{n-1}$$

$$=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right)$$

推论 记 $\varepsilon_{ij}=1+\delta_{ij}$，$\delta_{ij}>-1$ 则有

$$\mu=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}} \tag{7.36}$$

证明 将 $\varepsilon_{ij}=1+\delta_{ij}$ 代入式(7.35)得

$$\mu=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(1+\delta_{ij}+\frac{1}{1+\delta_{ij}}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(2+\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}}\right)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}}$$

因为

$$\delta_{ij}=-1+a_{ij}\frac{w_i}{w_j}=\frac{a_{ij}-\dfrac{w_i}{w_j}}{\dfrac{w_i}{w_j}} \tag{7.37}$$

因此 δ_{ij} 在某种意义上可视为判断矩阵的元素偏离某个一致性判断矩阵的相对偏离量，而衡量一致性的指标 μ 就是由这种相对偏离量决定的。这就使 μ 有了清楚的物理意义。式(7.36)还可以再作些简化，当 δ_{ij} 不大时

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}}\approx\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}{\delta_{ij}}^2=\frac{n(n-1)}{2}\delta^2,$$

这里 δ^2 可看成是 ${\delta_{ij}}^2(i\neq j)$的平均值，于是有

$$\mu\approx\frac{1}{2}\delta^2 \tag{7.38}$$

我们把 μ 定义为一致性指标 C.I.，即

$$\text{C.I.}=\mu=(\lambda_{\max}-n)(n-1) \tag{7.39}$$

一个不完全一致的矩阵在什么情形下是可以被接受的呢？这就是要确定检验一致性的方法与标准。这里我们没有直接用一致性指标作为检验一致性标准。诚然 C.I.值可以用来说明一致性程度，但影响一致性的因素除了人的判断外，还受到两两比较的比例标度的影响。这就使得对不同阶数的矩阵，C.I.可接受的临界值是不同的。为了得到一个对不同阶的判断矩阵均适用的检验一致性可接受的临界值，就要进一步研究 C.I.值与矩阵阶数的关系，事实上阶数越大两两比较越难达到一致。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

例如 2 阶正互反矩阵总是一致的，3 阶矩阵也比较容易达到一致，而 9 阶矩阵需独立给出 36 个判断，在 1～9 及其倒数的比例标度下，几乎不大可能达到一致。标度本身限制了一致性的实现。因此，有必要对一致性指标进行修正，以得到一个与阶数无关的检验标准。

萨迪[21]提出了用平均随机一致性指标 R.I.修正 C.I.的方法。这一方法在 AHP 中被普遍接受和采用。

平均随机一致性指标是同阶随机判断矩阵的一致性指标的平均值。其计算过程如下：

(1) 对 n 阶矩阵，独立地重复 $\frac{n-1}{2}$ 次随机地从 1，2，…，9 及 $\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{9}$ 中取值，作为矩阵上三角元素，相应倒数构成下三角元素，对角元素取为 1。由此产生一个随机正互反矩阵样本。

(2) 计算所得随机矩阵的一致性指标 C.I.；

(3) 重复上述步骤以得到足够多的样本，计算 C.I.的样本均值。这个均值就是平均随机一致性指标 R.I.。

表 7.3 列出的就是样本容量为 1000 的 1～15 阶正互反矩阵的 R.I.值。

萨迪建议用 R.I.值修正 C.I.值，得到一致性比例

$$\text{C.R.} = \frac{\text{C.I.}}{\text{R.I.}} \tag{7.40}$$

代替 C.I.作为一致性检验的指标，并建议当 C.R.<0.1 时，判断矩阵的一致性程度是可接受的，否则认为判断矩阵偏离一致性程度过大，因而需要进行调整，以便使判断趋于一致，得到较为合乎逻辑的排序。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.6 准则型和分配型 AHP

在上面一节讨论单准则下权重计算时，我们采用了一种归一化方法，即使权重分量的和$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。归一化方法不止一种，例如我们可以采用最大分量为 1 的归一化。对单准则下排序向量来说，不同的归一化方法不会影响排序及权重之比，但对总排序来说，不同的归一化方法将有可能得到不同排序结果。为此我们要对递阶层次结构作进一步分析。

仔细观察用 AHP 解决各类问题可以发现，上一层元素与支配元素之间有两种不同的关系，一类是从属关系。譬如，我们要选购一台音响设备，费用和质量是要考虑的两大因素，它们各占 50%，即它们的权重均为 0.5，接下来考虑属于质量的因素有音色、使用可靠性、安全性、式样与功能等，它们共享了权重 0.5。如果对质量因素考虑得更周全些，还可以列出若干个因素，但无论列出多少因素，它们总是分享了质量的 0.5 的权重。

假设这些因素有 n 个，它们对质量的权重分别为 w_i，$i=1$，…，n，那么$\sum w_i=1$，我们把上下层因素间的这种关系称为分配型，其归一化结果是$\sum w_i=1$。

在另一类关系中，支配关系作为准则对被支配元素起作用，被支配元素应根据它对准则满足的程度获得权重。例如某地区因风暴引起供电系统故障，现要对申请维修单位对维修次序进行排序。考虑的因素是单位重要性及受影响人数，它们对总目标的权重分别为 0.83 和 0.17。显然申请单位的重要性与它下一层元素一申请单位类型之间并没有直接从属关系。此时最

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

重要单位应直接享受上一层权重 0.83，而不是在各单位之间分配权重 0.83，否则当单位增多时在总排序中单位重要性权重贡献将会下降，从而出现不合理排序。这种按下层元素对上层元素的满意程度进行排序的关系称为准则型 AHP，此时若 i 是有最理想满意度的元素，则应有 $w_i=1$，其他元素可按其与 i 的相对关系获得权重。下面我们用一个简单的例子说明这两种 AHP 的区别。

例 1 设某班要对 A、B、C 三名学生的成绩排序(如图 7.19 所示)。考察的科目为数学(M)和语文(L)，重要性程度相同，A、B、C 三人的数学与语文成绩分别为：

$$M_A=100,\quad L_A=30;$$
$$M_B=100,\quad L_B=20;$$
$$M_C=30,\quad L_C=100$$

不用计算，人们根据常识立即可以判断 A 和 C 的名次相同，B 应排在最后。现在我们用两两比较方法分析，假设标度是连续的，得到对 M 和 L 的两个判断矩阵，然后分别按分配型和准则型算出单准则下的权重。在用准则型计算时，分数 100 是理想分，其相对权重为 1，如表 7.6(1)、(2)所示。

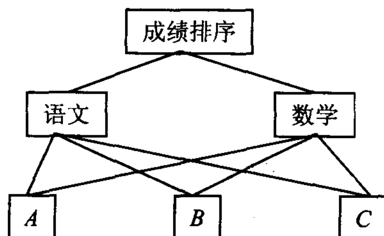


图 7.19 例 1 的递阶层次结构

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 7.6(1)　例 1 中对数学的权重计算

M	A	B	C	分配型 $w^{(1)}$	准则型 $\overline{w}^{(1)}$
A	1	$\frac{100}{100}$	$\frac{100}{30}$	0.435	1.000
B		1	$\frac{100}{30}$	0.435	1.000
C			1	0.130	0.3000

表 7.6(2)　例 1 中对语文的权重计算

L	A	B	C	分配型 $w^{(2)}$	准则型 $\overline{w}^{(2)}$
A	1	$\frac{30}{20}$	$\frac{30}{100}$	0.2	0.300
B		1	$\frac{20}{100}$	0.13	0.200
C			1	0.67	1.000

然后计算总排序权重

分配型：$w_A = w_1^{(1)} \times 0.5 + w_1^{(2)} \times 0.5 = 0.318$

$w_B = w_2^{(1)} \times 0.5 + w_2^{(2)} \times 0.5 = 0.283$

$w_C = w_3^{(1)} \times 0.5 + w_3^{(2)} \times 0.5 = 0.400$

其结果为 $C \succ A \succ B$。其结果显然违反人们常识。

准则型：$\overline{w}_A = \overline{w}_1^{(1)} \times 0.5 + \overline{w}_1^{(2)} \times 0.5 = 0.650$

$\overline{w}_B = \overline{w}_2^{(1)} \times 0.5 + \overline{w}_2^{(2)} \times 0.5 = 0.600$

$\overline{w}_C = \overline{w}_3^{(1)} \times 0.5 + \overline{w}_3^{(2)} \times 0.5 = 0.650$

归一化排序向量 $W'=(0.342,\ 0.316,\ 0.342)^T$，其排序应 $A \sim C \succ B$($\sim$表示等价)。其结果符合常识。实际上这是一个准则型问题，故采用准则型算法是合理的。

对于准则型问题，可以证明，增加一个新元素时不会影响原有元素的排序。例如在此例中若我们增加一名新学生 D，他的成绩为数学 10 分，语文 100 分，重新用准则型方法计算，得

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

到 $W=(0.265, 0.245, 0.265, 0.225)^T$，那么 $A \sim C \succ B \succ D$，即 A、B、C 的次序不变。这也是合理的。再例如在大学招生中，若新增加一名考生，绝不会因为新考生的出现而改变原有考生的次序，新考生只能按其成绩插入老考生的排队中。有时在准则型问题中会缺少理想元素(例如这里若 A、B 的数学分均不为 100 分)，此时可以增加一个理想元素 B，设其得分为 100，然后参与判断，获得总排序向量，再删除 E 重新归一化即可获得原有元素的总权重。

例 2 我们将例 1 的问题稍为改变，现在要在 A、B、C 中分配奖学金，分配的原则是语文和数学各得 50%，每门课程按成绩分配，求 A、B、C 各可分得的份额，其成绩同例 1。

显然地，层次结构仍为图 7.19，但这是一个分配型问题，无论 A、B、C 的数学成绩如何，他们只能分享 50%的奖学金，按分配型计算得到 $W=(0.318, 0.283, 0.4)$，即 $C \succ A \succ B$，其次序与准则型不同。

对于分配型 AHP 引入新元素后，其分配关系改变，因而有可能产生次序变化，即所谓逆序，这是合理的。例如增加新生 D 后，按分配型得到权重向量 $W=(0.269, 0.248, 0.263, 0.221)^T$，其次序为 $A \succ C \succ B \succ D$，$A$、$B$、$C$ 的次序发生了变化。这与穆迪图中逐次顺序图有相似之处。

由以上分析，我们得到下述结论：

(1) 分配型和准则型是两种不同类型的问题。分配型强调相对关系，准则型则强调绝对关系。当引入新元素时，准则型 AHP 不会产生逆序，其排序结果与评分法(即绝对标度)一致，但分配型 AHP 可能产生逆序。这是合理的现象。

(2) 对一般层次结构而言，除最后一层外，绝大部分为分配型结构，最后一层应区分两种类型，分别予以对待。

(3) 在同一层次结构中分配型和准则型可以同时存在。但

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在求总权重时最后要按常规重新进行归一化(即令$\sum W_i=1$)。

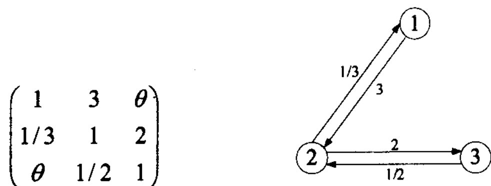
7.7 不完全信息下的排序

本节讨论应用层次分析法时经常遇到的信息不全，即给出的判断矩阵元素发生残缺情形下的排序方法。

7.7.1 残缺判断矩阵可接受条件

由于进行决策时，人们对于每个准则都要填写一个判断矩阵。每个判断矩阵需进行$\dfrac{n(n-1)}{2}$次两两比较，当层次很多，因素很复杂时，总的判断量将会很大，很有可能出现某个参与决策的专家对某些判断缺少把握、不感兴趣或不想发表意见的情形。这种情形应当允许，否则勉为其难，反而可能掩盖事物的本质。此时得到的判断矩阵必定有空缺，这种判断称为残缺判断。显然一个判断矩阵的残缺程度对排序的正确性是有影响的。信息越少，排序的随意性越大，因此首先我们要研究什么样的残缺是可接受的，一个可接受的残缺矩阵，至少应有多少个元素呢？

我们可用有向有权图$G(A)$来表示判断矩阵。每个被比较元素代表一个结点，有向边(v_i, v_j)表示判断a_{ij}，a_{ij}值作为(v_i, v_j)



$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \theta \\ 1/3 & 1 & 2 \\ \theta & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

图 7.20 一个可接受的残缺判断矩阵及其相应的有向有权图

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的权值并直接记 $a_{ij}=(v_i, v_j)$，图 7.20 上是一个判断矩阵及其对应的有向有权图。其中 θ 表示残缺元素，矩阵中 a_{13}、a_{31} 残缺，相应地有向图上就没有边(v_1，v_3)及(v_3，v_1)。

当 a_{13} 残缺而 a_{12}、a_{23} 存在时，那么 a_{13} 可近似表示为

$$a_{13}=a_{12}a_{23}$$

即 a_{23} 可以通过其他元素间接获得。

定义 7.14 残缺元素 a_{ij} 称为可以间接获得的，如果存在互相邻接的非残缺边序列 a_{ij1}，a_{j1j2}，…，a_{jkj}。一个残缺判断矩阵称为是可接受的，如果它的任一残缺元素都可间接获得，否则就是不可接受的。

定理 7.8 一个残缺判断可接受的必要条件是除对角元素外，每行每列至少要有一个给定元素，或者说至少要作$(n-1)$个判断。

证明 设 $a_{1k}(1\neq k)$是残缺矩阵 $A=(a_{ij})$的一个残缺元素，当 A 可接受时，由定义 7.14 知必存在非残缺元素序列 a_{1k1}，a_{k1k2}，…，a_{ksk}，因此 1 行上至少有一个给定元素 a_{1k1}，且 $k_1\neq 1$，k 列上也至少有一个给定元素 a_{ksk}。$k_s\neq k$，由 1、k 的任意性可得必要性，同时由互反性知在上三角上至少要有$(n-1)$个判断。

例如给出判断矩阵的一行(或一列)元素就是可接受的最少判断的一种形式。但定理 7.8 不是充分条件，例如图 7.21 上的残缺矩阵即使每行每列都有一个元素，此矩阵仍是不可接受的。

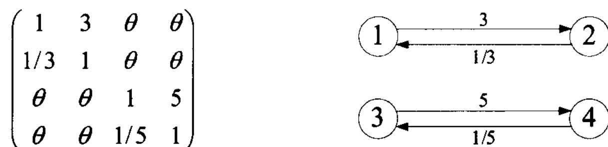


图 7.21 一个不可接受的残缺判断矩阵及其相应的有向有权图

定理 7.9 一个残缺判断矩阵可接受的充分必要条件是它

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的有向图是强连通的。

定理的证明不难由强连通的条件得到。

定义 7.15 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$称为非负拟互反的，如果它的元素满足

(1) $a_{ij}\geqslant 0$ 对任意 i，$j=1$，…，n，$a_{ii}\geqslant 1$；

(2) 若 $a_{ij}>0$ 则 $a_{ij}=1/a_{ij}$ (7.41)

若 $a_{ij}=0$ 则 $a_{ji}=0$。

显然正互反矩阵都是非负拟互反矩阵，如果残缺矩阵元素用零元素代替，那么它就是一个对角元均为 1 的非负拟互反矩阵。

定理 7. 10 n 阶对角元为正的非负矩阵 A 为不可约的充分必要条件是存在正整数 $s\leqslant n-1$，使得 $A^S>0$。

定理证明略(参阅文献[8])。定理说明，当 A 不可约时，A 为素阵，因而关于正矩阵的 Perron 定理(定理 7.2)的一切结论均成立。

定理 7. 11 设 A 为对角元素为正的非负矩阵，A 不可约的充分必要条件是它的有向图 $G(A)$是强连通的。

证明 显然地，由定理 7.10 知，A 不可约则存在正整数 $s\leqslant n-1$，使 $A^S>0$，那么 A 的有向图的可达性矩阵元素均为 1，故 $G(A)$必为强连通的。

反之，若 $G(A)$是强连通的，则其可达性矩阵

$$T=A+A^2+\cdots+A^{n-1}>0$$

那么 $A^{n-1}>0$，否则若 $A^{n-1}=(a_{ij}{}^{n-1})$有某个元素 $a_{ij}{}^{(n-1)}\leqslant 0$ 则必存在正整数 $s<n-1$ 有 $a_{ij}{}^{(s)}>0$，于是

$$a_{ij}{}^{(s+1)}=a_{i1}a_{1j}{}^{(s)}+\cdots+a_{ii}a_{ij}{}^{(s)}+\cdots+a_{in}a_{nj}{}^{(s)}\geqslant a_{ii}a_{ij}{}^{(s)}>0$$

由此可推出 $a_{ij}{}^{(n-1)}>0$，故由定理 7.10 知 A 是不可约的。

定理 7. 12 一个残缺判断矩阵 A 是可接受的充分必要条件是 A 是不可约的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

由定理 7.9、定理 7.10、定理 7.11 直接可得到上述结论。

7.7.2 残缺判断矩阵的一致性条件

我们仍用残缺判断矩阵 A 所对应的有向赋权图 $G(A)$来讨论一致性问题。

定义 7.16 设残缺判断矩阵 $A=(a_{ij})$是 n 阶不可约拟互反矩阵，$G(A)$是 A 的有向赋权图。如果图中每一条回路的权都是 1，则称 A 是拟一致的；否则就不是拟一致的。

一个拟互反矩阵的一致性可用它的拟一致性表示。例如对于判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & \theta & 4 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1 & \theta \\ 1/6 & 1/2 & 1 & 1/2 & \theta \\ \theta & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1/4 & \theta & \theta & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

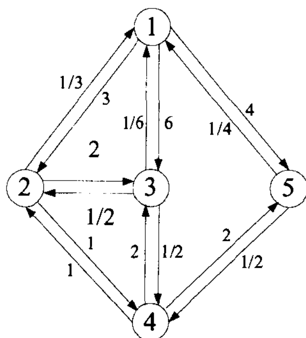


图 7.22 一个拟互反矩阵和它的有向赋权图

图 7.22 是它的有向赋权图。对回路(1，2，3，1)的权为 $a_{12}a_{23}a_{31}=3\times2\times\dfrac{1}{6}=1=1$，但回路(1，3，4，5，1)的权为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$6\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{4}\neq1$，故不是拟一致的。一个一致性正互反矩阵一定是拟一致的。

应当指出，这里没有用某些文献中所要求的所有非零元素满足 $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$ 作为拟一致的定义。因为此定义实际上只考虑了长度为 3 的回路权值为 1 的要求，故不全面。按此定义，上例中 A 是拟一致的，但实际上 A 不是拟一致的。

定理 7.13 设 $A=(a_{ij})$是 n 阶不可约拟互反矩阵，则 A 是拟一致的充分必要条件是存在一组正数 w_1，…，w_n，使得对每个 $a_{ij}\neq0$ 有

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j} \tag{7.42}$$

证明　先证必要性。设 A 是拟一致的，因为 $a_{ij}\neq0$，故对所有由 v_i 到 v_j 的通路其权值均为 a_{ij}，又因为 A 不可约，故总存在由 v_i 到 v_j 的通路，设其权值为 w_j 以及 i 到 1 的通路设其权值为 w_i，那么回路(i，…，j，…，1，…，i)的权值为 1，即

$$a_{ij}\times w_j\times\frac{1}{w_i}=1$$

即 $$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\quad i,\ j,\ =1,\ 2,\ \cdots,\ n\quad 当\ a_{ij}\neq0$$

充分性　考虑任一回路(i，j，k，…，1，m，i)，由于

$$a_{ij}\frac{w_j}{w_i}a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\cdots a_{1m}\frac{w_m}{w_1}a_{mi}\frac{w_i}{w_m}=1$$

$$故\ a_{ij}a_{jk}\cdots a_{1m}a_{mi}=1$$

因此 A 是拟一致的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.7.3 不完全信息下的排序方法

与完全信息下排序方法类似，也可用特征根方法、对数最小二乘法等方法获得不完全信息下的排序权值。

(1) 特征根方法及一致性检验

由拟互反矩阵拟一致性条件得出，对任何非零元素均有 $a_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}$。w_i、w_j 就是排序向量 $W=(w_1, \cdots, w_n)$的分量。把这一结论扩展到“零”元素即残缺元素上，即若 $a_{ij}=\theta$，那么就用 $\dfrac{w_i}{w_j}$ 替代它，于是对残缺判断矩阵可以构造一个辅助矩阵 $C=(c_{ij})$，其元素为

$$c_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & \text{当 } a_{ij}\neq\theta \\ \dfrac{w_i}{w_j} & \text{当 } a_{ij}=\theta \end{cases} \tag{7.43}$$

例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \theta \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \theta & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

的辅助矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

解辅助矩阵的特征值问题

$$CW=\lambda_{\max}W \tag{7.44}$$

展开后得到

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$(2w_1+2w_2,\ \frac{1}{2}w_1+w_2+2w_3,\ \frac{1}{2}w_2+2w_3)=\lambda_{max}(w_1,\ w_2,\ w_3)$$

解得 $\lambda_{max}=3$，$W=(0.571\,4,\ 0.285\,7,\ 0.142\,9)^T$。

实际上，上题中解(7.44)问题与解矩阵

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值问题 $\underline{A}W=\lambda_{max}W$ 等价。我们把 $\underline{A}$ 称为 A 的等价矩阵，$\underline{A}$ 中的数“0”表示数值为 0。

一般地，对残缺矩阵 A，定义一个等价矩阵 $\underline{A}=(\underline{a}_{ij})$，其元素满足

$$\underline{a}_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & \text{当 } a_{ij}\neq\theta \quad \text{且 } i\neq j \\ 0, & \text{当 } a_{ij}=\theta \\ m_i+1 & \text{当 } i=j\text{，其中 } m_i \text{ 为第 } i \text{ 行中残缺元素个数} \end{cases} \tag{7.45}$$

显然地，当 A 不可约时 $\underline{A}$ 也是不可约的非负拟互反矩阵，且必为素阵。这就保证了 $\underline{A}$ 的最大特征值的存在性与唯一性。从而可以把 $\underline{A}$ 的右主特征向量作为 A 的排序向量。

定理 7.14 设 A 是 n 阶非负不可约拟互反矩阵，$\underline{A}$ 是 A 的等价矩阵，λ_{max} 是 $\underline{A}$ 的最大特征值，则有 $\lambda_{max}>n$，当且仅当 A 拟一致时，$\lambda_{max}=n$。

定理证明类似于定理 7.6 的推论的证明。类似于定理 7.7 可得到下面定理 7.15

定理 7.15 令

$$a_{ij}=\begin{cases} \dfrac{w_i}{w_j(1+\delta_{ij})} & \text{当 } a_{ij}\neq\theta \\ 0 & \text{当 } a_{ij}\neq\theta \end{cases} \tag{7.46}$$

那么有

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\frac{\lambda - n}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n,\ aij\neq 0}\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}}\right)$$

$$\approx \frac{1}{n(n-1)}\left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{2}\right]\underline{\delta}^2 \quad (7.46)$$

其中 $\underline{\delta}^2$ 为非残缺元素相对误差平方平均值。

对于完全判断，由式(7.38)知 $\mu \approx \frac{1}{2}\delta^2$。由此可定义残缺元素拟一致指标 $\underline{\mu}$

$$\underline{\mu} \approx \frac{1}{2}\underline{\delta}^2$$

由式(7.47)可得到拟一致性指标

$$\underline{\text{C.I.}} = \underline{\mu} = \frac{\lambda_{\max} - n}{(n-1) - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}} \quad (7.48)$$

仍可取拟一致性比例 $\underline{\text{C.I.}} = \frac{\underline{\text{C.I.}}}{\text{R.I.}} < 0.1$ 作为检验一致性标准。显然当元素残缺时，由于信息减少，对可获得的信息的正确性要求提高了。此外，残缺判断所得结果的可靠性还和残缺率有关。这里残缺率 p 为

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n(n-1)} \quad (7.49)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

m_i为第 i 行残缺个数。当残缺率很大时，即使一致性很好，所得结果仍然可能是不理想的。

例 3 美国费城到世界六个城市距离排序估计。

萨迪给出了这个问题的完全判断矩阵(A)。与此相应，这里给出了三个不同的残缺判断(A_1，A_2，A_3)，并进行了比较(表 7.7)。

表 7.7 例 3 的残缺判断结果

城市 / 相对距离 / 判断矩阵	费城—开罗	费城—东京	费城—芝加哥	费城—洛杉矶	费城—伦敦	费城—蒙特利尔
A	0.263	0.379	0.033	0.116	0.164	0.027
A_1	0.264	0.422	0.035	0.129	0.119	0.031
A_2	0.205	0.585	0.019	0.086	0.078	0.026
A_3	0.203	0.608	0.025	0.067 6	0.067 6	0.029
实际距离	5 729	7 449	660	3 658	3 658	400
实际相对距离	0.278	0.361	0.032	0.177	0.177	0.019

开罗 东京 芝加哥 洛杉矶 伦敦 蒙特利尔

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ 1/8 & 1/9 & 1 & 1/6 & 1/5 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 6 & 1 & 1/3 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1/7 & 1/9 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_1=\begin{pmatrix} 0.263 \\ 0.379 \\ 0.033 \\ 0.116 \\ 0.164 \\ 0.027 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_{max}=6.397 \\ C.I.=0.079\,4 \\ C.R.=0.063\,5 \\ P=100\% \end{matrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & \theta & \theta & 9 \\ 1/8 & 1/9 & 1 & 1/6 & 1/5 & 2 \\ 1/3 & \theta & 6 & 1 & \theta & \theta \\ 1/3 & \theta & 5 & \theta & 1 & \theta \\ 1/7 & 1/9 & 1/2 & \theta & \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad W_1=\begin{pmatrix} 0.264 \\ 0.422 \\ 0.035 \\ 0.129 \\ 0.119 \\ 0.031 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_{max}=6.8 \\ C.I.=0.084 \\ C.R.=0.067 \\ P=33.3\% \end{matrix}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$A_2=\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7\\ 3 & 1 & \theta & \theta & \theta & \theta\\ 1/8 & \theta & 1 & 1/6 & 1/5 & \theta\\ 1/3 & \theta & 6 & 1 & \theta & \theta\\ 1/3 & \theta & 5 & \theta & 1 & \theta\\ 1/7 & \theta & \theta & \theta & \theta & 1\end{pmatrix},\quad W_2=\begin{pmatrix}0.205\\0.585\\0.019\\0.086\\0.078\\0.026\end{pmatrix}$$

λ_{max}=6.04
C.I.=0.019
C.R.=0.015
P=53%

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7\\ 3 & 1 & \theta & \theta & \theta & \theta\\ 1/8 & \theta & 1 & \theta & \theta & \theta\\ 1/3 & \theta & \theta & 1 & 0 & \theta\\ 1/3 & \theta & \theta & \theta & 1 & \theta\\ 1/7 & \theta & \theta & \theta & \theta & \theta\end{pmatrix},\quad W_3=\begin{pmatrix}0.203\\0.608\\0.025\\0.0676\\0.0676\\0.029\end{pmatrix}$$

λ_{max}=6
C.I.=0
C.R.=0
P=67%

从上表可以看出，尽管 A_1、A_2、A_3 都有很好的一致性，但随着残缺率的上升，得到结果的可靠性下降。一般以残缺率不要超过 30% 为宜。

(2) 对数最小二乘法

应用对数最小二乘法处理残缺判断是要确定排序权重向量 $W=(w_1, \cdots, w_n)^T$，$\sum w_i=1$，$w_i>0, i=1, \cdots, n$ 使之满足

$$\min \sum_{i,j=1;a_{ij}\neq\theta}^{n} (\log a_{ij}-\log \frac{w_i}{w_j})^2 \tag{7.50}$$

若将和号内对数取为自然对数，并令 $r_{ij}=\ln a_{ij}$，$x_i=\ln w_i-\beta$，$(i, j=1, 2, \cdots, n)$，这里 β 是一个常数，那么式(7.50)就是

$$\min \sum_{i,j=1;a_{ij}\neq\theta}^{n} (r_{ij}-x_i+x_j)^2 \tag{7.51}$$

这是一个最小二乘法问题，构造指示矩阵

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & 当 a_{ij}\neq\theta \\ 1 & 当 a_{ij}\neq\theta\end{cases} \tag{7.52}$$

那么由式(7.51)可得法方程

$$x_i\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}-\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,x_j=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,r_{ij}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

这是一组线性方程组，用数值方法解得 $x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$后，再求出

$$\underline{w_i}=e^{\beta}e^{xi}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

归一化后得到

$$w_i=\frac{e^{\beta+xi}}{\sum_{j=1}^{n}e^{\beta+xi}}=\frac{e^{xi}}{\sum_{j=1}^{n}e^{xj}} \tag{7.53}$$

这里同样要求残缺判断矩阵是不可约的，否则有可能得不到唯一解。

例 4 给出残缺判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & \theta & \theta & 1/2 & 1\\ \theta & 1 & \theta & \theta & 1\\ \theta & \theta & 1 & \theta & 1\\ 2 & \theta & \theta & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

用对数最小二乘法求其排序向量。

解：首先按式(7.53)写出法方程

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\begin{aligned}
2x_1 \qquad\qquad\qquad -x_4 \quad -x_5 &= -\ln2 \\
x_2 \qquad\qquad\qquad -x_5 &= 0 \\
x_3 \qquad\quad -x_5 &= 0 \\
-x_1 \qquad\qquad\quad +2x_4 \quad -x_5 &= 2\ln2 \\
-x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad -x_4 \quad +4x_5 &= -\ln2
\end{aligned}$$

解得 $x_1=x_2=x_3=x_5=0$，$x_4=\ln2$ 由此得到

$$W=(0.166\,7,\ 0.166\,7,\ 0.166\,7,\ 0.333\,3,\ 0.166\,7)^T$$

与用特征根方法得到的结果完全相同。这是因为 A 是拟一致的，$\lambda_{max}=n$，C.I.=0。故结果与方法无关。最小二乘法在解决群组残缺判断时有特别的应用价值。

7.8 专家咨询与群组排序

7.8.1 AHP 中专家咨询工作

决策是人们根据已掌握的信息对解决问题的方案进行抉择的过程。在决策过程中我们既要提倡进行科学的定量的分析，又必须充分强调定性分析的重要性。事实上，任何决策过程中总是始终贯穿着人的判断与分析的。在层次分析法中，具有丰富经验和知识的专家判断更是起着重要的作用，因此充分重视和做好汇集专家判断信息的专家咨询工作就具有特别重要的意义。做好专家咨询工作应注意以下几点：

(1) 合理选择咨询对象。要选对、选准咨询对象，真正发挥专家所长。在咨询过程中，可针对不同准则，请不同专家完成判断矩阵，而不要勉强一个专家从头到尾完成所有判断。

(2) 创造适合于咨询工作的良好环境。一方面要为专家准备必要的，可靠的材料与信息，包括简明而准确地介绍 AHP；另一方面要为他们创造一个适合于独立思考的环境。

(3) 掌握正确咨询方法。咨询前要设计好含义清楚、简单

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

易填的表格。咨询中允许专家判断违反传递性和一致性，还允许专家对他所不熟悉或不愿意发表意见的问题不给出判断。在咨询中除采用直接给分外，原则上应坚持两两比较的形式，以提高判断的可信度。

(4) 及时对咨询信息进行分析，必要时进行反馈。专家咨询后，对收集到的信息要进行适当分析，当因各种原因有明显失误的判断或不同专家的判断有很大差异时，应将咨询予以反馈，再进行下一次咨询。最后，可得到比较合理的结果。

为了使决策科学化、民主化，一个复杂系统的决策通常总有多个决策者(包括专家)或决策部门参与。这样在用 AHP 模型进行专家咨询时，对同一个准则，将获得多个判断矩阵，因此有必要对多人决策即所谓群组决策(群组 AHP)进行研究，以求获得一个合理的综合结果。这些方法大体上仍可分为两类：特征根法及拟合方法。

7.8.2 群组 AHP 的特征根法

用特征根法处理群组判断问题有两种思路，第一种是把多个判断矩阵采用算术平均和几何平均方式予以合并成一个综合判断矩阵，然后求这个矩阵的排序向量；第二种是将各个判断矩阵所对应的排序向量予以综合得到综合排序向量。由于前者在互反性、一致性上均存在缺陷，尤其是经过仿真计算试验表明，前者的保序性较差，因此这里不再予以介绍。只介绍后一种方法。

(1) 方法 1：加权几何平均综合排序向量法

对 S 个专家判断矩阵 $A_k=(a_{ij}^{(k)})k=1, \cdots, s$ 分别求出它们的排序向 $W^{(k)}=(w_1^{(k)}, \cdots, w_n^{(k)})^T$，$k=1, \cdots, s$，然后求出它们的加权几何平均综合排序向量 $W=(w_1, \cdots, w_n)^T$，其中

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$w_j=\frac{\underline{w}_j}{\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_i} \qquad j=1, \cdots, n$$

$$\underline{w}_j=(w_j^{(1)})^{\lambda 1}(w_j^{(2)})^{\lambda 2}\cdots(w_j^{(S)})^{\lambda S} \quad j=1,\cdots, n \tag{7.54}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$$

其中 λ_k 为第 k 个专家的权重 $k=1, \cdots, s$。当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s$ 时有

$$\underline{w}_j=(w_j^{(1)}\cdots w_j^{(s)})^{\frac{1}{s}} \qquad j=1, \cdots, n \tag{7.55}$$

w_j 的标准差 σ_j 以及相应于矩阵 $A=\frac{w_i}{w_j}$ 的元素 a_{ij} 的标准差 σ_{ij} 为

$$\sigma_j=[\frac{1}{s-1}\sum_{k=1}^{s}(w_j^{(k)}-w_j)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad j=1, \cdots, n$$

$$\sigma_{ij}=[\frac{1}{s-1}\sum_{k=1}^{s}(a_{ij}^{(k)}-a_{ij})^2]^{\frac{1}{2}} \qquad i,j=1, \cdots, n \tag{7.56}$$

(2) 方法 2：加权算术平均综合向量法

与(1)类似，采用各个判断矩阵排序向量的算术平均作为综合排序向量 $W=(w_1, \cdots, w_n)^T$，其中

$$w=\lambda_1 w_j^{(1)}+\lambda_2 w_j^{(2)}+\cdots+\lambda_s w_j^{(s)} \quad j=1, \cdots, n \tag{7.57}$$

$$\sum_{k=1}^{s}\lambda_k=1$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s$ 时有

$$w_j=\frac{1}{s}(\lambda_1 w_j^{(1)}+\lambda_2 w_j^{(2)}+\cdots+\lambda_s w_j^{(s)}) \quad j=1,\cdots,n \qquad (7.58)$$

同样地，可用式(7.56)计算标准差并反馈给专家参考。

无论哪一种方法都要求每个专家的判断矩阵符合满意的一致性要求。此外在决策中往往会出现由于专家意见分歧很大而使决策折中的情形。例如一个专家的排序向量为$(0.9,0.1)^T$，另一个为$(0.1,0.9)^T$，最后结果是(0.5，0.5)即两个方案半斤八两。这种情况的出现对决策不利。这主要在于两个判断矩阵相差太大。因此除了一致性要求外，我们还应对群组判断矩阵提出“相容性”要求。关于相容性问题我们将另撰文讨论。

7.8.3 群组 AHP 的拟合方法

劳士麦[8]提出用对数最小二乘法处理群组判断与残缺判断的混合情形。设 s 个专家的判断矩阵为 $A_k=(a_{ij}^k)k=1,\cdots,s$，这些矩阵可为残缺判断矩阵。综合排序向量 $W=(w_1,\cdots,w_n)^T$，的选取应使

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\log a_{ij}^{(k)}-\log\frac{w_i}{w_j})^2 \qquad (7.59)$$

取最小值。类似于上一节方法，设 $w_i=e^{xi+\beta}$，$\sum_{i=1}^{n} w_i=1$，以及取此对数为自然对数 $y_{ij}^{(k)}=\ln a_{ij}$，并令

$$\delta_{ij}^{(k)}=\begin{cases}0 & 当\ a_{ij}^{(k)}=\theta\ 时; \\ 1 & 当\ a_{ij}^{(k)}\neq\theta\ 时。\end{cases}$$

代入式(7.59)得到

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\min \sum_{k=1}^{s} \sum_{ij=1}^{n} \delta_{ij}^{(k)} (y_{ij}^{(k)} - x_i + x_j)^2$$

从而得到方程组

$$x_i \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} (x_j \sum_{k=1}^{s} \delta_{ij}^{(k)})$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^{(k)} y_{ij}^{(k)}, \qquad i=1, \cdots, n \tag{7.60}$$

记 I_i 为第 i 行上得到判断的元素的总个数(即 $I_i = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^{(k)}$)，$I_{ij}$ 表示 i 行 j 列上元素得到判断的总个数(即 $I_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ij}^{(k)}$)，$Y_i$ 表示 i 行上得到判断的元素值的对数总和(即 $Y_i = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^{(k)} \ln a_{ij}^{(k)}$)则式(7.60)可写成

$$I_i x_i - \sum_{j=1}^{n} I_{ij} x_j = Y_i \qquad i=1, \cdots, n \tag{7.61}$$

解出 x_i, $i=1, \cdots, n$ 然后可得到归一化排序向量，其分量为

$$w_i = \frac{e^{xi}}{\sum_{j=1}^{n} e^{xj}} \tag{7.62}$$

例 5 设对某准则有 3 人参加判断，方案个数为 5，其判断矩阵如表 7.8 所示。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 7.8 例 5 的判断矩阵

行＼列	专家	1	2	3	4	5
1	1	1	1	2	3	θ
	2	1	θ	θ	1/2	1
	3	1	θ	2	1	θ
2	1	1	1	2	3	θ
	2	θ	1	θ	θ	θ
	3	θ	1	θ	θ	θ
3	1	1/2	1/2	1	2	θ
	2	θ	θ	1	θ	θ
	3	1/2	θ	1	1/2	θ
4	1	1/3	1/3	1/2	1	θ
	2	2	θ	θ	1	2
	3	1	θ	2	1	θ
5	1	θ	θ	θ	θ	1
	2	1	θ	θ	1/2	1
	3	θ	θ	θ	θ	1

得到法方程

$$\begin{aligned}
7x_1 \quad -x_2 \quad -2x_3 \quad -3x_4 \quad -x_5 \quad &= 1.7918 \\
-x_1 \quad +3x_2 \quad -x_3 \quad -x_4 \quad &= 1.7918 \\
-2x_1 \quad -x_2 \quad +5x_3 \quad -2x_4 \quad &= -2.0794 \\
-3x_1 \quad -x_2 \quad -2x_3 \quad +7x_4 \quad -x_5 \quad &= -0.8109 \\
-x_1 \quad -x_4 \quad +2x_5 \quad &= -0.6931
\end{aligned}$$

解得

$x_1=0.476\,8$，$x_2=0.838\,1$，$x_3=0.029\,1$，$x_4=0.216\,5$，$x_5=0.000\,0$

最后得权重向量

$$W=(0.216,\ 0.337,\ 0.137,\ 0.174,\ 0.137)^T$$

应用上述方法可以处理那些单个判断矩阵是可约的因而用特征根方法无法处理的情形。此时只需满足各个判断矩阵之

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

和是不可约的就可以了。例如，上例中每个判断矩阵都是可约的，但它们的和不可约。这种情形在实际中是经常发生的，部分专家不太熟悉的事物往往是另一部分专家熟悉的，他们所提供的信息互相补充，常可获得较正确的排序。

7.9 内部依存的递阶层次结构的排序

前面第 7.5 节中我们已经给出了内部依存的递阶层次结构的确定方法。本节将讨论内部依存系统的排序方法。由于这种系统元素之间的支配作用不再是单向的，故其最后排序必须考虑反复作用的极限形式。其处理方法远比内部独立系统复杂得多。

7.9.1 系统超矩阵的构造

考虑一个由 N 个层次(或元素组，子系统)组成的系统。N 个层次分别用 L_1，L_2，…，L_n 表示，第 k 层次中的元素用 e_{k1}，e_{k2}，…，e_{knk} 表示。对内部依存递阶层次结构而言，L_1 只有一个元素 e_{11}。依次把每一个元素作为准则，将它所支配的元素作

$$
W=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} L_1 & L_2 & & & \cdots & \cdots & & L_N & \\ e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{2n2} & \cdots & \cdots & e_{N1} & \cdots & e_{NnN} \end{array} \\
\begin{array}{cc} L_1 & e_{11} \\ & e_{21} \\ L_2 & \vdots \\ & e_{2n2} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ & e_{N1} \\ L_N & \vdots \\ & e_{NnN} \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccc}
W_{11} & & & & & & & & \\
W_{21} & \ddots & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & \ddots & W_{22} & & & & & \\
 & & & W_{23} & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & W_{ii} & & & \\
 & & & & & W_{i+1i} & \ddots & W_{N-1N-1} & \\
 & & & & & & & W_{NN-1} & \\
 & & & & & & & & W_{NN}
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad (7.63)
$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

单准则下的排序，并将单准则下得到的排序结果排列成矩阵 W:

这里以矩阵上方的元素作为准则，该元素下的列就是左方相应有关元素对它的单准则排序。由于每个元素所支配的元素只有本层元素和下层元素，因而是双对角块矩阵，这里 W_{ij} 是 $n_i \times n_j$ 的矩阵块。特别地由于 L_1 只有一个元素，故 $W_{11}=0$，W_{21} 是列向量，并且 W 中每一列都应是加权归一化了的(参阅文献［8］)。矩阵 W 称为内部依存的递阶层次结构的超矩阵。内部独立的层次结构作为内部依存系统的特例，它的超矩阵应为

$$W=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ W_{21} & 0 & & & \\ & W_{32} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & W_{NN-1} & I \end{bmatrix} \tag{7.64}$$

7.9.2 极限排序

上面已经提到在内部依存结构中由于元素之间的影响是交互的，例如 A 影响 B，B 影响 C，C 又影响 A，因此用单准则下合成总排序的方法已不适用，而应当考虑反复影响的极限情形，也就是要求出元素对目标层的极限相对排序。这是个矩阵，记为 LIP。

设系统的超矩阵为 $W=(W_{ij})$。W 的 k 次幂为 $W^k=(W_{ij}^{(k)})$。那么 W^k 就反映了累计 k 步的相对排序，当 $k\to\infty$时，若 W^k 的极限存在，就有

$$\text{LIP}=W^{\infty}=\lim_{k\to\infty} W^k \tag{7.65}$$

定理 7.15 设内部依存的递阶层次结构系统的超矩阵式(7.63)中，子块 W_{NN} 除 1 外没有其他模为 1 的特征值，那么

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$W^{\infty}_{NN}=\lim_{k\to\infty} W^{k}_{NN}$ 存在，且系统的极限相对排序矩阵为

$$W^{\infty}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_1 & D_2 & \cdots & D_N \end{bmatrix} \tag{7.66}$$

这里

$$D_N=W^{k}_{NN},$$
$$D_{N-1}=D_N W_{N N-1}(I-W_{N-1,N-1})^{-1}$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$D_i=D_{i+1}W_{i+1,i}(I-W_{ii})^{-1} \tag{7.67}$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$D_1=D_2W_{21}(I-W_{11})^{-1}=D_2W_{21}$$

定理证明略。由定理结论知，D_1，D_2，…，D_N 就分别是最底层元素对 L_1，L_2，…，L_N 上元素的极限相对排序权重矩阵。特别地 D_1 是 n_N 维向量，就是方案层元素对目标层的排序权重向量。可以验证公式(7.67)对于内部依存的递阶层次结构的特例——内部独立结构，也是成立的。

当 W^{∞} 存在时，我们有

$$WW^{\infty}=W^{\infty}=1\times W^{\infty}$$

因此，W^{∞} 的每一列均是 W 的属于 1 的特征向量。

关于内部依存的递阶层次结构的更复杂的情形，包括反馈结构、循环结构以及网络结构等，这里不再介绍，有兴趣的读者可查阅文献[8]。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第 8 章 多目标决策

8.1 基本概念

进行决策时，人们总是要按某种标准从众多可供选择的方案中挑选出最好或最满意的方案。若所考虑的问题只有一个目标作为选择好坏的标准，这就是通常的(单目标)最优化问题。但在实践中，更多地会遇到需要考虑多个目标都尽可能好的问题，例如在水电工程的可行性分析中就需要综合考虑防洪效益、发电效益、移民和淹没损失等。这些目标往往是互相制约的，甚至是互相矛盾的，多目标规划就是研究这类问题的一种数学方法。

8.1.1 多目标问题举例——投资决策问题

某投资开发公司拥有总资金 A 万元，今有 $n(n\geqslant 2)$个项目可供选择投资，设投资第 $i(i=1, \cdots, n)$个项目需用资金 a_i 万元，预计可得收益 b_i 万元，问应如何决定投资方案？

一个好的投资方案应是投资少而收益大的方案。设

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{决定投资第}i\text{个项目}\\ 0 & \text{决定不投资第}i\text{个项目}\end{cases}$$

并称它们为投资决策变量。总投资金额为$\sum a_i x_i$，总收益为$\sum b_i x_i$，所选择的投资方案应使

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \text{最小}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \to 最大$$

同时应满足总投资不超过公司总资金以及 x_i 取 0 或 1 的约束条件，这样可归纳如下的数学问题

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \\ &\max \quad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ &\text{s.t.} \quad A - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant 0 \\ &\qquad x_i(x_i - 1) = 0 \qquad i=1, \cdots, n \end{aligned} \tag{8.1}$$

8.1.2 多目标规划问题一般形式

从多目标最优化模型中我们可以归纳出一般模式：

$$\begin{aligned} &\min \quad f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ &\qquad \cdots \ \cdots \\ &\min \quad f_p(x_1, \cdots, x_n) \\ &\max \quad f_{p+1}(x_1, \cdots, x_n) \\ &\qquad \cdots \ \cdots \\ &\max \quad f_l(x_1, \cdots, x_n) \\ &\text{s.t.} \quad g_j(x_1, \cdots, x_n)0 \geqslant 0, \qquad j=1,\cdots, m \end{aligned} \tag{8.2}$$

对某一目标函数 $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$的极大化可以等价地转化为对函数 $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$的极小化。所以在上述模型中所有的 max 都可转化为 min。同时令 $X=(x_1, \cdots, x_n)^T$ 并将 p 个目标函数 $f_1(X),\cdots, f_p(X)$以向量目标函数$(f_1(X),\cdots, f_p(X))^T$表示，那么就可以得到如下的多目标问题的一般形式

$$(\text{V}) \qquad \text{V}-\min(f_1(X),\ldots, f_p(X))^T \tag{8.3}$$

$$g_i(X) \geqslant 0 \qquad j=1, \ldots, m \quad X \in E_n$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，V—— min 表示对目标函数 $f_1(X),\cdots$，$f_p(X)$以向量形式 $F(f_1(X),\cdots$，$f_p(X))^T$进行极小化。由于在实际问题中 p 个目标量纲往往是不同的，故事先需把每个目标规范化，例如可把带量纲的目标 $f_i(X)$进行如下处理，令

$$f_i(X)=\frac{f_i(X)}{\underline{f}_i} \quad 其中 \underline{f}_i=|\min_{X\in R} f_i(X)| \qquad i=1,\ldots,p$$

以后我们总假设，多目标规划问题(V_p)已经过了规范化处理。

式(8.3)中，称 $g_j(X)\geqslant 0$，$j=1$，…，m 为约束条件。符号≥表示大于或等于。记

$$R=\{X|g_j(X)\geqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ m\ \ X\in E_n\} \tag{8.4}$$

R 就是多目标问题(V_p)的可行解集，若记 $F(X)=(f_1(X),\ \cdots,\ f_p(X))^T$，那么(VP)可简记为

$$(\mathrm{VP}) \qquad V-\min_{X\in R} F(X) \tag{8.5}$$

8.2 多目标问题的解集

多目标问题(VP)的任一可行解 $X\in E$，都对应一个 p 维向量目标函数 $F(X)$。要比较不同可行解的优劣，实质上就是要比较对应 p 维向量的大小。但是两个向量是很难比较大小的。我们用一个简单的两个目标的决策问题予以说明。设

$$V-\min_{X\in R} F(X)=(f_1(X),\ \cdots,\ f_2(X))^T$$

其中，$f_1(X)$、$f_2(X)$的形状分别如图 8.1(a)、(b)、(c)所示。在图 8.1(a)上 $f_1(X)$，$f_2(X)$的最小值同时在可行解 $\overline{X}$ 上达到。我们称具有这样性质的 $\overline{X}$ 为问题的绝对最优解，绝对最优解的集合记为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

R^*_{ab}。但在多目标问题中，绝对最优解往往是不存在的。从图 8.1(b)看出，当 $f_1(X)$在 X^1 取最小值时，$f_2(X)$在 X^1 不取最小值，而当 $f_2(X)$在 X^2 处取最小值，$f_1(X)$在 X^2 处不取最小值。那么最优解究竟应取在哪里呢？为了解决多目标问题有关解的概念与性质，我们先引入几个向量不等式的记号：

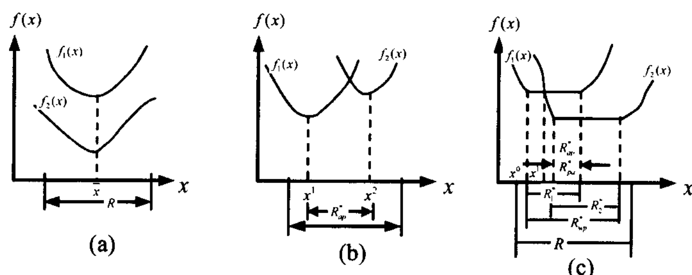


图 8.1　多目标问题的解集示意图

设　$F^1=F(X^1)=(f_1(X^1),\cdots,f_p(X^1))^T=(f^1_1,\cdots,f^1_p)^T\in E_p$,

$F^2=F(X^2)=(f_1(X^2),\cdots,f_p(X^2))^T=(f^2_1,\cdots,f^2_p)^T\in E_p$,

我们规定

(1) $F^1=F^2$，当且仅当 $f^1_j=f^2_j$　　$j=1, \cdots, p$;

(2) $F^1<F^2$，当且仅当 $f^1_j<f^2_j$　　$j=1, \cdots, p$;

(3) $F^1\leqslant F^2$，当且仅当 $f^1_j\leqslant f^2_j$　　$j=1, \cdots, p$，即 F^1 的分量均不大于 F^2 的分量;

(4) $F^1\leqslant F^2$，当且仅当 $f^1_j\leqslant f^2_j$　　$j=1, \cdots, p$，并且至少存在一个 $j_0(1\leqslant j_0\leqslant p)$，有 $f^1_{j0}<f^2_{j0}$。

利用上述记号可以比较可行解集中点 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 的优劣。

定义 8.1　设 $\overline{X}\in R$，若对任意 $X\in R$ 均有 $F(X)\geqslant F(\overline{X})$

即 $f_i(X)\geqslant f_i(\overline{X})$，$i=1, \cdots, p$ 则称 $\overline{X}$ 为(V_p)的绝对最优解。绝

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

对最优解全体的集合记为 R^*_{ab}。

根据定义，我们可以找出图 8.1(a)的绝对最优解集合。

定义 8.2 $X^0 \in R$，若存在另一个可行解 $X^1 \in R$ 满足 $F(X^1) \leqslant F(X^0)$，即 $f_j(X^1) \leqslant f_j(X^0)$，$j=1$，…，$p$ 且至少有一个 $1 \leqslant j_0 \leqslant p$，满足 $f_{j0}(X^1) < f_{j0}(X^0)$，则 X^0 相对于 X^1 是劣势的。X^0 称为(V_p)的劣解。

从定义知，X^1 的 p 个目标都不比 X^0 差，而且至少有一个要比 X^0 好，故 X^0 为劣解。若 $X \in R$ 不是劣解，就称为非劣解。

定义 8.3 设 $\overline{X} \in R$，若不存在 $X \in R$，有 $F(X) \leqslant F(\overline{X})$，则称 $\overline{X}$ 为问题(V_p)的非劣解或称为有效解，有效解的全体称为有效解集，记为 R^*_{pa}。

有效解也称帕莱托(Pareto)最优解。它是多目标问题中一个最基本的概念。对有效解而言，找不到另一个目标函数都不比它差而且至少有一个比它要好的解。有效解就是非劣解。图 8.1(b)中给出了有效解集 R^*_{pa}。

把有效解中的条件稍为放宽就可得到弱有效解的定义。

定义 8.4 设 $\overline{X} \in R$，若不存在 $X \in R$，有 $F(X) < F(\overline{X})$，则 $\overline{X}$ 称为(VP)的弱有效解，弱有效解的集合记为 R^*_{wp}。

只要不存在一个各个目标均比 $\overline{X}$ 对应目标都好的点，那么 $\overline{X}$ 就是弱有效解也称 Pareto 弱有效解。弱有效解也可能是劣解。图 8.1(c)上标出了弱有效解集与有效解集。对于 $X^0 \in R^*_{wp}$ 存在 $X^1 \in R$，有 $F(X^1) \leqslant F(X^0)$，且 $f_2(X^1) < f_2(X^0)$，故 X^0 也是劣解，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

但找不到一个 $X \in R$，使 $F(X) < F(X^0)$ 故 X^0 也是弱有效解。

前面我们提到多目标规划的 p 个目标函数事先必须进行规范化处理。这种处理也就是将每个目标函数进行单调变换，那么经过这种单调变换后的极小化模型的有效解与原模型的有效解之间有如下关系：

定理 8.1 设 $R \in R^n$，$F(X) = (f_1(X), \cdots, f_p(X))^T$ 在 R 上有定义，若向量目标函数为 $H(X) = (h_1(X), \cdots, h_p(X))^T$，其中 $h_1(X) = \Phi_i(f_i(X))$，$i=1, \cdots, p$，并且每一个 Φ_i 关于对应 f_i 都是严格增函数，则

(1) $R^*_{pa}(H, R) \subseteq R^*_{pa}(F, R)$

(2) $R^*_{wp}(H, R) \subseteq R^*_{wp}(F, R)$

这里括号中的(H, R)表示可行解集为 R，目标函数为 H。

证明　对(1)只需证若有 $\overline{X} \notin R^*_{pa}(H, R)$则必有 $\overline{X} \notin R^*_{pa}(F, R)$，因为 $\overline{X} \notin R^*_{pa}(F, R)$，则存在 $X \in R$ 有 $F(X) \leqslant F(\overline{X})$，即有 $f_i(X) \leqslant f_i(\overline{X})$，$i=1, \cdots, p$ 且其中至少有一个不等式严格成立。由于 Φ_i 是 f_i 的严格增函数，故有

$$\Phi_i(f_i(X)) \leqslant \Phi_i f_i(\overline{X})) \qquad i=1, \cdots, p$$

并且至少有一个不等式严格成立。故

$$H(X) \leqslant H(\overline{X})$$

这就证明了 $\overline{X} \notin R^*_{pa}(H, R)$。

只要把(1)的证明中的不等式“$\leqslant$”换成严格不等式“$<$”就可得到(2)的证明。

上述定理说明，在对多目标极小化模型进行单调递增变换

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

后，新模型的有效(或弱有效)解将仍为原模型的有效(弱有效)解。这一结果对多目标最优化的求解是很有用的。

8.2.3 各种解集间的关系

假设单目标问题

$$\min \quad f_j(X) \quad X \in E_n,$$
$$g_i(X) \geqslant 0 \qquad i=1,\cdots, \ m$$

的最优解集合为 R^*_j $j=1,\cdots, \ p$。那么集合 R, R^*_j $j=1,\cdots, \ p$, $R^*_{ab}, R^*_{pa}, R^*_{wp}$ 之间的关系由下面一些定理给出。

定理 8.2 绝对最优解集是各单目标问题最优解集之交，即 $R^*_{ab}=\bigcap\limits_{j=1}^{p} R^*_j$。

定理 8.3 $R^*_{pa} \subset R^*_{wp} \subset R.$

定理 8.4 $R^*_j \subset R^*_{wp}$

定理 8.5 $R^*_{ab} \subset R^*_{pa}$

由上述定理可得到

$$\begin{aligned} & R^*_{ab} \subset R^*_{pa} \subset R^*_{wp} \subset R \\ & R^*_j \subset R^*_{wp} \quad j=1, \cdots, p \\ & R^*_{pa} \cup R^*_1 \cup R^*_2 \cup \cdots \cup R^*_p \subset R^*_{wp} \end{aligned} \tag{8.6}$$

图 8.1(c)中显示了各种解集的关系。

定理 8.6 若 $R^*_{ab} \neq \Phi$则

由上述定理可得到

$$(1)\ R^*_{pa}=\bigcap_{j=1}^{n} R^*_j=R^*_{ab} \tag{8.7}$$

$$(2)\ R^*_{wp}=\bigcup_{j=1}^{P} R^*_j$$

图 8.2(a)、(b)表示了各个解集之间的关系。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

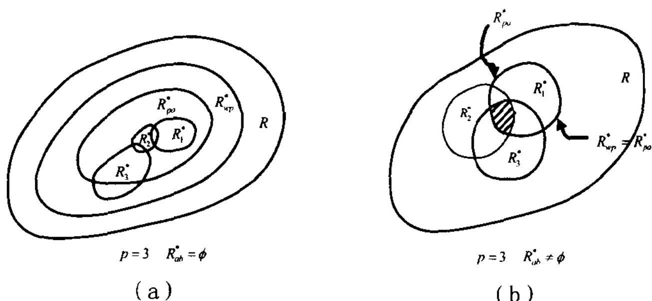


图 8.2　各解集之间的关系

定理 8.7　设 R 为凸集，$F(X)\in E_p$ 是 R 上的严格凸函数(即其各个分量函数 $f_j(X)$，$j=1,\cdots$，p 都是 R 上的严格凸函数)，则

$$R^*_{pa}=R^*_{wp}$$

上述定理说明，在目标函数和约束可行解集具有严格凸性条件下，有效解集与弱有效解集是等同的。例如图 8.1(b)中的有效解集 R^*_{pa} 就是弱有效解集 R^*_{wp}(定理证明可参阅文献［10］)。

8.3　像集

研究像集对多目标规划问题来说十分重要，它有助于给出处理多目标问题的一些办法。

对于任意给定的点 $X^0=(x^0_1,\ \cdots,\ x^0_n)^T\in R\subset E_n$，相应的目标向量为

$$F(X^0)=(f_1(X^0),\ \cdots,\ f_p(X^0))\in E_p$$

$F(X^0)$为欧氏空间的一个点。若记

$$F(R)=\{F|F=F(X),\ X\in R\}$$

则对任意 $X^0\in R$，都有一个确定的 $F^0\in F(R)$，有 $F^0=F(X^0)$。反之，对于任意 $F^0\in F(R)$，都至少有 R 中一个 X^0 有 $F^0=F(X^0)$。这样我们就定义了一个由 R 到 $F(R)$的映像 F:

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$F: \quad R \to F(R)$$

我们称 $F(R)$为 R 的像集。

例 设 $X \in R = \{x|0 \leqslant x \leqslant 2\}$，$f_1 = f_1(x) = (x-2)x$，$f_2 = f_2(x) = -x$，$F(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$，求像集 $F(R)$。

解：将 $x = -f_2$ 代入 f_1 得 $f_1 = f_2(f_2+2) = (f_2+1)^2 - 1$

这在 $f_1 \sim f_2$ 平面上是一条顶点为(−1，1)的抛物线，并且

当 $x=0$(点 A)时 $f_1 = f_1(0) = 0$，$f_2 = f_2(0) = 0$(点 A')

当 $x=1$(点 B)时 $f_1 = f_1(1) = -1$，$f_2 = f_2(1) = -1$(点 B')

当 $x=2$(点 C)时 $f_1 = f_1(2) = 0$，$f_2 = f_2(2) = -2$(点 C')

$F(R)$是抛物线段 $A'B'C'$，在曲线 $B'C'$下方无图形。

对于像集 $F(R)$，我们可以定义绝对最优点，有效点及弱有效点。

定义 8.5 设 $F^* \in F(R)$，若对任意 $F \in F(R)$均有 $F \geqslant F^*$，则称 F^*为绝对最优点，绝对最优点集合记为 E^*_{ab}。

定义 8.6 设 $F^* \in F(R)$，若不存在 $F \in F(R)$有 $F \leqslant F^*$，则称 F^*为 F 的有效点，有效点集记为 E^*_{pa}。

定义 8.7 设 $F^* \in F(R)$，若不存在 $F \in F(R)$有 $F < F^*$，则称 F^*为弱有效点，弱有效点集合记为 E^*_{wp}。

和上一节讨论类似，可以证明下面关系成立。

$$E^*_{ab} \subset E^*_{pa} \subset E^*_{wp} \subset F(R) \tag{8.8}$$

在多目标规划中我们最终的目的是要找出(VP)的有效解集与弱有效解集，而它们是要通过 $F(X)$的比较确定的，因而直接在 $F(R)$上寻找，比在 R 上通过 $F(X)$比较寻找要容易。$F(R)$上有效点(或弱有效点)的原像就是 R 上的有效解(或弱有效解)。仍以上例为例，求

$$\text{(VP)} \quad \begin{aligned} & \text{V}-\min[f_1(x), f_2(x)] \\ & x \in R = \{x|0 \leqslant x \leqslant 2\} \\ & f_1 = f_1(x) = (x-2)x, \quad f_2 = f_2(x) = -x \end{aligned}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的有效解(及弱有效解集)。

我们直接在像集 $F(R)$上求有效(或弱有效)点。从图 8.3 可看出像集为弧 $A'B'C'$，弧 $A'B'$(不包括 B')上任一点 F 均可在其左下方($B'C'$上)找到点 $F^0 \in F(R)$有 $F^0 < F$，因而 $F \notin E^*_{wp}$，从而 $F \notin E^*_{pa}$，故 $A'B'$上的点均非有效(也非弱有效)点，而在 $B'C'$(包括 $B'C'$)上的任一点 F^0 在其左下方，或左方，下方均找不到 $F(R)$上的点，因而 $B'C'$段为有效点(也为弱有效点)集合。而 $B'C'$的原像 BC 即为有效(也为弱有效)解集。由 E^*_{pa}通过映射找出 R^*_{pa}，比直接从 R 上寻找 R^*_{pa}，显然要容易。

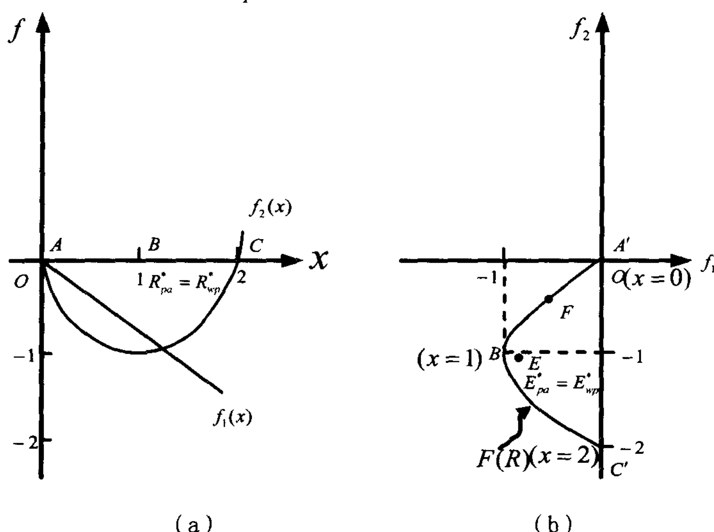


图 8.3 本例的像集

研究像集还能够提供一些处理多目标问题的方法，对其中的某些办法还能给出几何解释。下面要讲到的理想点法就是利用像集求有效解的一个典型实例。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

8.4 多目标规划的约束法

求解多目标决策问题的方法很多，例如前面介绍的层次分析法就是一个简洁而实用的多目标决策方法。一般地来说，对多目标问题的处理有三种途径：简化为单目标问题；求多目标规划有效解(或弱有效解)；或用其他实用决策方法(图 8.4)。其最基本的方法就是将多目标问题尽量转化为单目标问题处理，因而多目标问题的第一步总是要精简目标，减少那些不必要的目标，尤其是那些重复定义的目标。如果两个目标之间存在着从属关系，那么就不能同时把它们列为目标。例如增加利润和

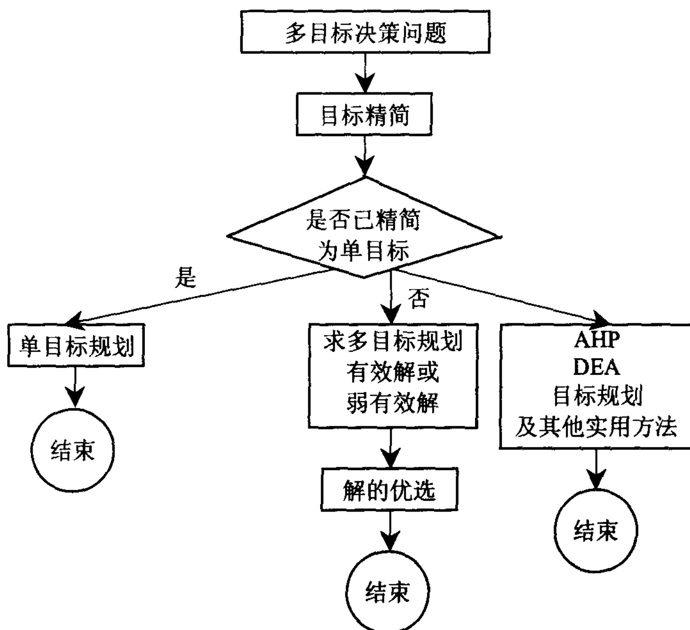


图 8.4 多目标问题解题过程

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

降低成本就不能列为两个目标。事实上降低成本是增加利润的手段而已。还有一些目标是可以合并的，例如降低原料费与降低管理费都应归并在降低成本这个目标之下。有些根本无法实现的目标应予以放弃。有些互相对立的目标经过权衡可以放弃其中某些个。有些在现阶段必须不折不扣实现的目标，可作为约束来处理。总之，要使问题尽量简化。本节将在已简化的基础上介绍几种多目标规划的常用方法。

前面我们已经知道，一个给定的多目标规划问题(VP)，一般具有许多有效解或弱有效解。因此在求解(VP)时，人们通常不满足于求出它的随意一个有效解或弱有效解。而是要设法求得这样一个解，它既是问题的有效解或弱有效解，同时又是在某种意义下是决策者所满意的解，即是带有决策者偏好的解。而求解的基本途径就是根据问题的特点和决策者的偏好，将 p 个目标函数转化为一个数值目标函数 $U(F)=U(f_1, \cdots, f_p)$。从而把求解多目标极小化问题(VP)归结为单目标极小化问题：

$$\min U(F(X))$$
$$X \in R$$

一般来说，采用不同形式的目标函数可得到(VP)的不同意义下的解。本节将某些目标函数转化为约束的方法解题，因而也称为约束法。

8.4.1 主要目标法

如果决策者的偏好关系是 $f_1(X)$ 最重要，希望其取值尽量地小，而对其他的 $f_i(X)(i=2, \cdots, n)$ 只要取不超过一个估计值 f_i 就可以了，那么(VP)就可能转化为单目标极小化问题

$$(\mathrm{P}_1)\quad \begin{aligned} &\min \quad f_i(X) \\ &g_i(X) \geqslant 0 \qquad j=1, \cdots, m \\ &f_i(X) \leqslant f_i' \qquad i=2, \cdots, p \end{aligned} \qquad (8.9)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

并可得到下述结论：

结论 1 (P_1)的最优解 X^*必为(VP)的弱最优解。

证明 若 X^*不是弱最优解，则必存在 $X^0\in R$，使 $f_i(X^0)<f_i(X^*)(i=1,\cdots,p)$，于是

$$f_1(X^0)<f_1(X^*)=\min f_1(X)$$
$$f_i(X^0)<f_1(X^*)\leqslant f_i \qquad i=2,\cdots,p$$

(X^0)为(P_1)的可行解，那么 X^*将不是(P_1)的最优解，此与假设矛盾，故 X^*一定是弱有效解。

应用上述方法的困难在于估计 $f_i(i=2,\cdots,p)$的值往往比较困难，估计值过小，可能会使问题(P_1)没有可行解，而估计值过大，等于在原问题中舍弃了其他目标。

8.4.2 字典序法

设决策者有偏好关系：$f_1(X)$最重要，$f_2(X)$次重要，…，$f_p(X)$最不重要。在保证$f_1(X)$的最大利益的前提下，寻找对$f_2(X)$的最有利的可行解；在保证$f_2(X)$已得利益前提下寻找对$f_3(X)$最有利的可行解，以此类推，即先求

$$(P_1)\quad \min \quad f_1(X)$$
$$X\in R=\{X|g_i(X)\geqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ m\}$$

的最优解 X^1，$f_1(X^1)$是(P_1)的最小值，(P_1)的最优解可能不止一个，在其最优解集 $R_1=\{X|f_1(X)=f_1(X^1),\ X\in R\}$ 中寻找问题

$$(P_2)\quad \min \quad f_2(X)$$
$$X\in R_1=\{X|f_1(X)=f_1(X^1)X\in R\}\subset R$$

的最优解 X^2。再从(P_2)的最优解集 $R_2=\{X|f_2(X)=f_2(X^2),\ X\in R_1\}$中寻找对$f_3(X)$最有利的解。一般地若我们已求出$(P_{k-1})$的最优解$X^{k-1}$，那么再由规划问题

$$(P_k)\quad \min \quad f_k(X)$$
$$X\in R_{k-1}=\{X|f_i(X)=f_i(X^i),i=1,\cdots,k-1,X\in R_{k-2}\}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

找出最优解 X^k。并可得到结论：

结论 2 (P_p)的最优解一定是有效解(证明略，参阅文献[10])。

值得注意的是，若到某一步(P_k)，其最优解唯一，这意味着(P_{k+1})的可行解也唯一，因此有(P_{k+1})的最优解 $X^{k+1}=X^k$，从而 $X^p=X^{p-1}=\cdots=X^k$。这就意味着在原问题(VP)中舍弃了目标 $f_{k+1}(X)$，$\cdots f_p(X)$。

为了避免问题(P_k)的约束条件

$$f_i(X)=f_i(X^i) \quad i=1,\cdots,k-1,X\in R_{k-2} \tag{8.10}$$

只有一个可行解的情形发生，可对等式约束条件作适当放宽：取定适当正数 $\varepsilon_i(i,\ \cdots,k-1)$，将等式约束改变为

$$f_i(X)\leqslant f_i(X^i)+\varepsilon_i \quad i=1,\cdots,k-1 \tag{8.11}$$

这时，满足(8.10)的 X 必满足(8.11)，反之不一定成立。故满足(8.11)的最优解只是(P_k)的近似最优解，由此得到修改后的字典序法

$$(P_1) \qquad \min \quad f_1(X) \qquad X\in R \tag{8.12}$$

的最优解为 X^1。顺次解

$$(P_k) \qquad \min \quad f_k(X) \qquad f_i(X)\leqslant f_i(X^i)+\varepsilon_i \quad i=1,\cdots,k-1 \qquad X\in R_{k-1} \tag{8.13}$$

得最优解 $X^k(k=2,\ \cdots,\ p)$。则类似于结论 2 可证明 X^p 一定是原问题的弱有效解。

8.5 评价函数法

求解多目标问题式(8.3)

$$\text{V}-\min \quad F(X)=[f_i(x),\ \cdots,\ f_p(X)]'$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$g_j(X)\geq 0 \qquad j=1,\ \cdots,\ m \qquad X\in E_m$$

的一个重要和基本途径，是根据问题的特点和决策者的意图，构造一个把个目标转化为一个数值目标的评价函数 $h(F)=h(f_1,\ \cdots,\ f_m)$，这样就把多目标问题归结为与之相关的单目标极小化问题

$$\min_{X\in R} \quad h[F(X)] \tag{8.14}$$

这种借助于构造评价函数把多目标问题转化为单目标最优化的方法称为评价函数法。一般地来说，采用不同形式的评价函数可求得不同意义下的解，同时也对应了一个不同的求解方法。本节将介绍几种基本和典型的评价函数法，以下定理的证明均可参阅文献[10]。

8.5.1 线性加权和法

线性加权和法是一个最基本最简单的评价函数法。这个方法的指导思想是根据各个目标在问题中的重要程度，分别赋予它们一个权重系数，然后把它们的线性加权和作为评价函数，求其极小。即对

目标函数 $f_1(x)$ $f_2(x)\cdots$ $f_j(X)\cdots$ $f_p(X)$

给出权值 λ_1 λ_2 $\cdots$ λ_j $\cdots$ λ_p

其中 $\lambda_j\geq 0$，$j=1,\ \cdots,\ p$，且 $\sum\lambda_j=1$

并记

$$\wedge^{+}=\{\lambda|\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)^T,\ \sum\lambda_j=1,\ \lambda_j\geq 0\}$$

$$\wedge^{++}=\{\lambda|\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)^T,\ \sum\lambda_j=1,\ \lambda_j>0\} \tag{8.15}$$

然后解单目标规划

$$(\text{P}) \quad \min \quad \sum\lambda_j f_j(X)=\lambda^T F(X) \quad X\in E_n \tag{8.16}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$g_i(X)\geqslant 0 \quad i=1,\ \cdots,\ m$$

得到最优解。那么我们有如下定理：

定理 8.8 设 X^* 为线性加权和问题(P)的最优解，则有

(1) 若 $\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)^T\in\wedge^+$，则 $X^*\in R^*_{wp}$，这里 R^*_{wp} 是(VP)的弱有效解集；

(2) 若 $\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)^T\in\wedge^{++}$，则 $X^*\in R^*_{pa}$，这里 R^*_{pa} 是(VP)的有效解集；

(3) 若 $\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)^T\in\wedge^+$，且 X^* 为(P)的唯一最优解，则 $X^*\in R^*_{pa}$。

8.5.2 理想点法

对多目标规划

(VP) $V-\min\quad [f_1(X),\ \cdots,\ f_p(X)]^T\ X\in E_n$,

$$g_j(X)\geqslant 0 \quad i=1,\ \cdots,\ m$$

令 $\quad f_1^*=\min_{X\in R}f_1(X),\ \cdots,\ f_p^*=\min_{X\in R}f_p(X)$

其中 $R=[X|g_j(X)\geqslant 0,\ i=1,\ \cdots,\ m]$，我们称

$$F^*=(f_1^*,\ \cdots,\ f_p^*)^T \tag{8.17}$$

为理想点，但一般来说(VP)的绝对最优解不一定存在，因此 F^* 不一定属于像集。在像集 $F(R)$中求与理想点 F^* 最近的点，即求

$$(\bar{P})\quad \min_{F\in F(R)}[\sum_j\ (f_j-f_j^*)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{8.18}$$

的最优解，设其最优解为 $\bar{F}$，$\bar{X}$ 为 $\bar{F}$ 的原像，即 $\bar{X}\in R$，且

$\bar{F}=[f(\bar{X}),\ \cdots,\ f(\bar{X})]^T$，令评价函数

$$h(F)=h(f_1,\ \cdots,\ f_p)=[\sum(f_j-f_j^*)^2]^{\frac{1}{2}}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

解问题(P) $\min_{X\in R} h[F(X)]=\min_{X\in R}[\sum(f_j-f^*_j)^2]^{\frac{1}{2}}\ X\in E_n$ (8.19)

设其最优解为 $\hat{X}$，且 $\hat{F}=[f(\hat{X}),\cdots,f(\hat{X})]^T$，那么我们有下述结论：

(1) $\overline{X}$ 为(P)的最优解；

(2) $\hat{F}$ 为($\overline{P}$)的最优解；

(3) 若 $f_j(x)$ $j=1$，…，p，为严格凸函数，$g_i(X)$ $i=1$，…，m 为严格凹函数，则

$$\overline{F}=[f(\overline{X}),\ \cdots,\ f(\overline{X})]^T=[f(\hat{X}),\cdots,f(\hat{X})]^T=\hat{F}\text{。}$$

8.5.3 虚拟点法

在理想点法中，为求出每个目标 $f_i(x)$ 的最小值 f_i^*，需要很大的工作量。如果能够估计一个数 f_i^0 使 $f_i^0\leqslant f_i^*$，($i=1$，…，p) 可以节省很大工作量。称 $(f_1^0,\ \cdots,\ f_p^0)^T$ 为虚拟点[因为可能没有可行解 X^0 可以使 $f_i(X^0)=f_i^0$]。

我们要构造一个评价函数 $h[F(X)]$，使 $h[F(X)]$ 在 R 上的最优解与虚拟点最靠近。令

$$H[F(X)]=\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left[\frac{f_j(X)-f_j^0}{f_j^0+\delta_j}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{8.20}$$

其中 p 为正整数，$\lambda_j>0$($j=1$，…，p)为加权系数，且 $\sum\lambda_j=1$，当 $f^0_j>0$ 时，取 $\delta_j=0$，当 $f^0_j\leqslant 0$ 时，取 $\delta_j>-f^0_j$。求

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$(P)\min_{X\in R} h(F(X))=\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left[\frac{f_j(X)-f_j^0}{f_j^0+\delta_j}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\quad X\in E_n \tag{8.21}$$

的最优解 $\overline{X}$。那么可以证明 $\overline{X}$ 一定是有效解。

8.5.4 平方和加权法

和虚拟点法类似，先给出每个目标函数最优值的下界 $f^0{}_j$，满足 $\min_{X\in R} f_j(X)\geqslant f^0{}_j$，$j=1$，…，$p$，令评价函数

$$h(F)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\ \ (f_j-f^0{}_j)^2 \tag{8.22}$$

其中，$\lambda=(\lambda_1，\cdots，\lambda_p)^T\in\wedge^{++}$，求规划问题

$$(P)\quad \min_{X\in R} h[F(X)]=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\ [f_j(X)-f^0{}_j]^2\quad X\in E_n$$

的最优解 $\overline{X}$，则可以证明 $\overline{X}$ 为(VP)问题的有效解。

8.5.5 min—max 法(极小—极大法)

在决策时考虑“在最不利情形下找出一个最有利”的策略。按此思想构造一个评价函数

$$h[F(X)]=\max_{1\leqslant i\leqslant p} f_i(X) \tag{8.23}$$

注意，这里 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} f_i(X)$ 是变量 X 的函数。图 8.5 表示了一个

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

p=2、n=1 的评价函数 $h[F(X)]$。得到 $h[F(X)]$后，再求规划问题

$$(\text{P}) \quad \min\ h[F(X)] = \min_{X\in R} \{\max_{1\leqslant i\leqslant p} f_i(X)\} \quad X\in E \tag{8.24}$$

的最优解 $\overline{X}$，可以证明 $\overline{X}$ 就是(VP)的弱有效解。

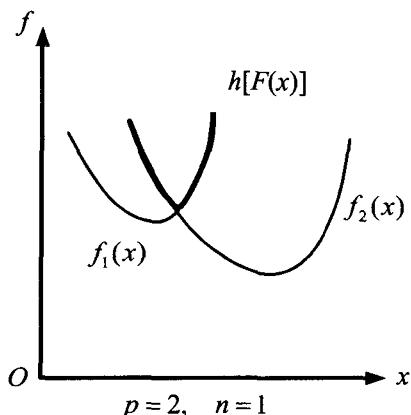


图 8.5 极小一极大法的评价函数 $h[F(x)]$

对于上述问题(P)，可以引入一个新变量 t，将它转化为通常形式的数学规划问题

$$(\text{P}_t) \qquad \min t$$
$$f_i(x)\leqslant t,\ j=1,\ \cdots,\ p \tag{8.25}$$
$$g(X)\geqslant 0 \quad i=1,\ \cdots,\ m$$

那么问题(P)与(P_t)是等价的。

定理 8.9 设($\overline{X}$，$\bar{t}$)为(P_t)的最优解，则 $\overline{X}$ 必为(P)的最优解。反之设 X 为(P)的最优解，令

$$\bar{t} = \max_{1\leqslant i\leqslant p} f_i(\overline{X})$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

则($\bar{X}$，$\bar{t}$)必为(P_t)的最优解。

如果引入权重 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)^T\in \wedge^{++}$，那么相应的 min—max 法为

$$(\mathrm{P})\quad \min\quad h[F(X)]=\min_{X\in R}\{\max_i \lambda_i f_i(X)\} \tag{8.26}$$

8.5.6 乘除法

设对于任意的 $X\in R$ 均有 $f_j(X)>0, j=1, \cdots, p$，根据实际问题，我们可以把目标分为两类，不妨设第一类目标为 $f_1(X)$，…，$f_s(X)(s\leqslant p)$，要求目标越小越好；第二类目标为 $f_{s+1}(X)$，…，$f_p(X)$，要求目标越大越好，此时令评价函数为

$$h(F)=\frac{\prod_{j=1}^{s} f_j}{\prod_{j=s+1}^{p} f_j}$$

再求(P) min $h[F(X)]=\dfrac{\min\prod_{j=1}^{s} f_j(X)}{\prod_{j=s+1}^{p} f_j(X)}$ (8.27)

的最优解 $\bar{X}$，则 $\bar{X}$ 必为问题(VP)的有效解。

我们也可对上述 P 个目标函数加权，得到相应的规划问题

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$(P)\ \min \quad h[F(X)]=\frac{\min\limits_{X\in R}\prod\limits_{j=1}^{s}f_j(X)^{\lambda_j}}{\prod\limits_{j=s+1}^{p}f_j(X)^{\lambda_j}}\quad \lambda\in\wedge^{++} \tag{8.28}$$

我们还可以根据决策者的偏好构造出各种类型的评价函数。其基本原则是必须保证由评价函数得到的最优解 $\overline{X}$ 是原问题的有效解或至少为弱有效解。下面我们将指出,当评价函数 $h(F)$具有某种单调性时,是可以保证 $\overline{X}\in R^{*}_{pa}$(或 $\overline{X}\in R^{*}_{wp}$)的。

定义 8.8 设 $h(F)$为定义在 E_p 上的函数，若对于任意 $F^1<F^2$，F^1、$F^2\in E_p$ 有 $h(F^1)<(F^2)$则 $h(F)$称为严格单调的函数。

定理 8.10 若 $h(F)$为定义在 E_p 上的严格单调函数(单调函数), $\overline{X}$ 为规划问题

$$(P)\qquad \min_{X\in R}\quad h(F(X))$$

的最优解，则 $\overline{X}\in R^{*}_{pa}$($\overline{X}\in R^{*}_{wp}$)。

只需验证评价函数的严格单调性或单调性就可以得到评价函数的最优解是否为有效解或弱有效解。用初等方法可以得到关于本节介绍的几种评价函数的结论：

(1) 线性加权和法的评价函数 $h(F)=\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j f_j$

当 $\lambda\in\wedge^{++}$ 时，为严格单调函数，故 $\overline{X}\in R^{*}_{pa}$;

(2) 理想点法 $h(F)=[\sum\limits_{j=1}^{p}(f_j-f_j^{*})^2]^{\frac{1}{2}}$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为严格单调函数，故 $\overline{X} \in R^{*}_{pa}$；

(3) 虚拟点法的评价函数 $h(F)=\left[\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \frac{f_j - f_j^0}{(f_j^0 \times \delta_j)^p}\right]^{\frac{1}{p}}$

当 $\lambda \in \wedge^{++}$ 时为严格单调函数，故 $\overline{X} \in R^{*}_{pa}$；当 $\lambda \in \wedge^{+}$ 时，为单调函数，故 $\overline{X} \in R^{*}_{wp}$。

(4) 平方和加权法的评价函数 $h(F)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\ (f_j - f_j^{\ 0})^2$

当 $\lambda \in \wedge^{++}$ 时为严格单调函数，故 $\overline{X} \in R^{*}_{pa}$；当 $\lambda \in \wedge^{+}$ 时为单调函数，故 $\overline{X} \in R^{*}_{wp}$。

(5) 乘除法的评价函数 $h(F)=\left(\frac{\prod_{j=1}^{s} f_j^{\lambda j}}{\prod_{j=s+1}^{p} f_j^{\lambda j}}\right)$

当 $\lambda \in \wedge^{++}$,或 $\lambda_j = 1 \quad j=1,\cdots, p$ 时为严格单调函数,故 $\overline{X} \in R^{*}_{pa}$；当 $\lambda \in \wedge^{+}$ 时，$h(F)$为单调函数，故 $\overline{X} \in R^{*}_{wp}$。

8.6 权系数的确定方法

在各种评价函数法中，常常需要确定权重大小。这一节中介绍几种常用的确定权系数的方法。

8.6.1 交互型方法

设想在处理多目标问题时有决策人和分析人。决策人根据自己的偏好在决策开始或在决策过程中给分析人提供偏好(即权重)信息，分析人在计算过程中不断修正权重，这就是交互型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

方法。我们以两个目标的线性加权和方法的交互型算法予以说明。对多目标问题

$$(VP)\quad V\text{—}\min F(X)=(f_1(X),f_2(X))$$
$$X\in R$$

取 $\lambda=(\lambda_1，\lambda_2)^T\in\wedge^{++}$，求解规划问题

$$(P1)\quad \min_{X\in R}\lambda_1 f_1(X)+\lambda_2 f_2(X)$$

设其最优解为 X^1，相应目标函数为 $f_1{}^1=f_1(X^1),f_2{}^1=f_2(X^1)$。如果决策人认为 $f_2{}^1(X^1)$的值 $f_2{}^1$ 太大,则可增大相应目标 $f_2(X)$的权系数，令

$$\hat{\lambda}_1=\lambda_1-\Delta，\quad \hat{\lambda}_2=\lambda_2+\varDelta$$

$0<\varDelta<\lambda_1$，然后求解规划问题

$$(P2)\ \min\in_{X\in R}[(\lambda_1-\varDelta)f_1(X)+(\lambda_2+\varDelta)f_2(X)]$$

设其最优解为 X^2，相应目标函数值为 $f_1{}^2=f_1(X^2),f_2{}^2=f_2(X^2)$，由像集(图 8.6)不难看出

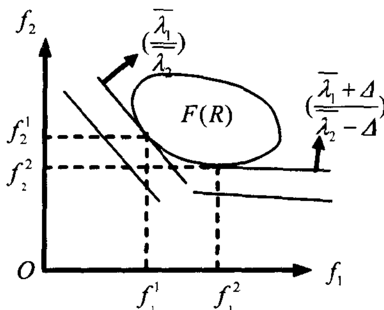


图 8.6　交互型方法的例子

$$f_1{}^2=f_1(X^2)\geqslant f_1(X^1)=f_1{}^1$$
$$f_2{}^2=f_2(X^2)\leqslant f_2(X^1)=f_2{}^1$$

并有如下定理：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

定理 8.11　设 $0<\Delta<\lambda_1$，$\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2)^T\in\wedge^{++}$，规划问题(P1)的最优解为 X^1，规划问题(P2)的最优解为 X^2，则有 $f_1^2\geq f_1^1$，$f_2^2\leq f_2^1$。

由定理可知，不断地根据决策者偏好信息修改 λ 可得到比较切合实际的系数以及相应的有效解。

8.6.2　老手法

老手法实际上是前一章讲的专家评分法的一种形式。分别征求与问题有关的老手们(即专家)的意见，请他们各自给出一组权系数。假设有 k 位老手，第 i 个老手给出的权系数为 $\lambda^i=(\lambda_{i1},\ \cdots,\ \lambda_{ip})^T$ 其中 λ_{ij} 表示第 i 人对目标 $f_j(X)$给出的加权系数，并且入 $\lambda^i\in\wedge^{++}$，这样我们得到表 8.1。

表 8.1　老手法的加权系数

老手 \ 权系数 \ 目标		$f_1(X)$	$f_2(X)$	…	$f_p(X)$
		λ_1	λ_2	…	λ_p
1 ⋮ k	λ^1 ⋮ λ^k	λ_{11} ⋮ λ_{k1}	λ_{12} ⋮ λ_{k2}	… …	λ_{1p} ⋮ λ_{kp}
平均加权		$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_{i1}$	$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_{i2}$	…	$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ip}$

对每一个 $f_j(X)$计算平均加权系数。

$$\lambda_j=(1/k)\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ij}\qquad j=1,\cdots,p$$

然后对每一个老手 $i(1\leq i\leq k)$求其对目标 $f_j(X)$的权系数的偏差

$$\Delta_{ij}=|\lambda_{ij}-\lambda_j|,\qquad j=1,\cdots,p$$

当所有的 Δ_{ij} 均很小时，说明 k 个人的意见基本一致，可事先规

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

定一个对 λ_j 的允许误差 ε_j，

当 $\Delta_{ij} \leqslant \varepsilon_j$， $i=1,\cdots,k$ $j=1,\cdots,p$ 时，

取 $\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)^T$ 作为加权系数。若有某些 i，j 有 $\Delta_{ij}>\varepsilon_j$，说明第 i 人对 $f_j(X)$ 的权系数与大家分歧较大。有必要进行下一轮协商。可先请那些有最大偏差数的老手发表意见，修改权系数。这样反复几次后，可得到一组满足上述要求的权系数 $(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)^T$。

8.6.3 α—方法

为了几何直观的方便，我们先对两个目标情形说明 α—方法。设单目标问题的最优解为 X^1 和 X^2，即

$$\min_{X\in R} f_1(X)= f_1(X^1)= f_1^1 \quad X^1\in R^*{}_1,$$

$$\min_{X\in R} f_2(X)= f_2(X^2)= f_2^2 \quad X^2\in R^*{}_2$$

若多目标问题绝对最优解集 $R^*{}_{ab}=\Phi$ 则有

$$f_1^1<f_1^2,\ f_2^2<f_2^1 \quad (f_1^1,\ f_2^1)^T,(f_1^2,\ f_2^2)^T\in F(R),$$

过此两点在像空间(图 8.7)确定一条直线，其方程为

$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=\alpha$ 其中 $\lambda_1+\lambda_2=1$，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，于是有

$$\lambda_1 f_1^1+\lambda_2+f_2^1=\alpha$$

$$\lambda_1 f_1^2+\lambda_2+f_2^2=\alpha$$

$$\lambda_1+\lambda_2=1$$

由此方程可解出

$$\lambda_1=\frac{f_2^1-f_2^2}{(f_1^2-f_1^1)+(f_2^1-f_2^2)}>0$$

$$\lambda_2=\frac{f_1^2-f_1^1}{(f_1^2-f_1^1)+(f_2^1-f_2^2)}>0$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

我们取 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)^T$ 作为权系数。

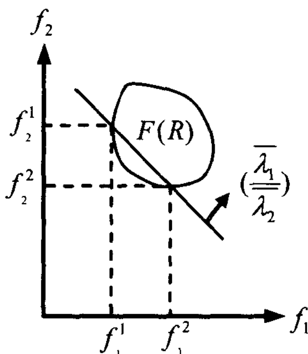


图 8.7 在像空间中确定 λ_1，λ_2

对于一般的(VP)问题，类似地，先求 p 个单目标问题的最优解，设规划问题

$$\min_{x\in R} f_j(X)$$

的最优解为 X^j， $j=1,\cdots, p$，记 $f_j^i=f_j(X^i)i=1,\cdots, p$，$j=1,\cdots,p$, 过 p 个点$(f_1^i,\cdots,f_p^i)$ $i=1,\cdots, p$ 作超平面

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j f_j=\alpha,\ \sum\lambda_j=1,\ \lambda_i\geqslant 1,\ j=1,\cdots,p$$

解线性方程组

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j f_j^i=\alpha,\qquad i=1,\cdots,p \tag{8.29}$$

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j_j}=1$$

可得到 λ_1，…，λ_p，α，当 $R^*_{ab}=\varPhi$时，可以唯一地确定出上述

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

方程组的一组解。

8.7 目标规划方法

在实际多目标决策问题中，不但多个目标可能是相互矛盾的，而且约束条件也可能相互矛盾，因而有可能不存在可行解。用前面方法处理这类问题将会十分困难。目标规划方法提供了处理多目标问题的一种方法，无论问题的可行解是否存在，它都可以应用，并能为决策者提供满意的行动方案和其他有用的信息，因而更符合实际情况。本节仅概要介绍目标规划方法及其应用。

8.7.1 实例

我们先从一个例子来说明目标规划的处理方法。

例 1 生产计划问题

设某工厂生产 A、B 两种产品，平均生产能力为 1 吨／小时。而工厂每周的开工时间为 90 小时。根据市场预测，A、B 两种产品每周最大销售量分别为 70 吨和 50 吨；利润分别为 3 千元／吨和 2.5 千元／吨。若希望利润最大，问应如何制定生产计划？

解：这是一个简单的单目标问题。设产品 A、B 每周生产量为 x_1(吨)和 x_2(吨)，相应的线性规划问题为

$$
\begin{aligned}
& \max \quad f=3x_1+2.5x_2 \\
(L) \quad & \text{s.t.} \quad x_1+x_2\leqslant 90 \\
& \qquad\quad x_1\leqslant 70 \\
& \qquad\quad x_2\leqslant 50 \\
& \qquad\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

利用单纯形法，易得问题(L)的最优解与最优值为

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$x_1=70, \quad x_2=20 \quad f_{max}=260(\text{千元})$$

现在按管理要求，需要考虑多个目标，这些目标按优先次序排列依次为

P_1(第一目标)：避免开工不足，充分利用生产能力以保证职工的正常就业水平；

P_2(第二目标)：加班时间不得超过 10 小时；

P_3(第三目标)：两种产品的产量分别达到预计的销售量 70 吨和 50 吨；

P_4(第四目标)：尽可能减少加班时间。

这些目标的优先次序是由决策者和分析者事先确定的，它们的优先次序为 $P_1 \succ P_2 \succ P_3 \succ P_4$。记号“$\succ$”表示优先关系，而不是数量大小。$P_1 \succ P_2$ 表示第一目标比第二目标重要。

仍设产品 A、B 的产量分别为 x_1(吨)、x_2(吨)，考虑：

(1) 生产力约束

设 d_1^-＝实际生产时间不足 90 小时的负偏差；

d_1^+＝实际生产时间超过 90 小时的正偏差(即加班时间)

并且要求 $d_1^- \geqslant 0$，$d_1^+ \geqslant 0$，且 $d_1^- d_1^+ = 0$。即应有

$$x_1+x_2+d_1^- - d_1^+ = 90, \qquad d_1^+ \geqslant 0, \; d_1^- \geqslant 0, \; d_1^+ d_1^- = 0$$

(2) 加班时间约束

设 d_4^-＝实际加班时间(即 d_4^-不足 10 小时)的负偏差；

d_4^+＝实际加班时间(即 d_4^+超过 10 小时)的正偏差。

则应有

$$d_1^+ + d_4^- - d_4^+ = 10 \qquad d_4^+ d_4^- = 0$$

(3) 销售量约束

设 d_2^-＝产品 A 的产量不足 70 吨的负偏差；

d_2^+＝产品 A 的产量超过 70 吨的正偏差；

d_3^-＝产品 B 的产量不足 50 吨的负偏差；

d_3^+＝产品 B 的产量超过 50 吨的正偏差。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

则对产品 A 应有

$$x_1+d_2^-{}-d_2^+=70 \qquad d_2^+\geqslant 0,\ d_2^-\geqslant 0,\ d_2^+d_2^-=0$$

对产品 B 应有

$$x_2+d_3^-{}-d_3^+=50 \qquad d_3^+\geqslant 0,\ d_3^-\geqslant 0,\ d_3^+d_3^-=0$$

(4) 目标函数约束

P_1：要避免开工不足，应使 $\min d_1^-$；

P_2：要使加班时间尽量不超过 10 小时应使 $\min d_4^+$；

P_3：要使产品的销售尽量达到预期数(超过无妨)应使 $\min d_2^-$，$\min d_3^-$。考虑到这两个目标处于同一优先级别，而且 A、B 的单位利润之比为 3∶2.5＝6∶5，因此将此两目标合并为

$\min(6d_2^-+5d_3^-)$

P_4：要尽量减少加班时间，则应使 $\min d_1^+$。

综合上面分析，可得到这一目标规划模型为

$$\min[P_1d_1^-+P_2d_4^++P_3(6d_2^-+5d_3^-)+P_4d_1^+]$$

$$\text{(GP)}\quad \text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1+x_2+d_1^-{}-d_1^+=90 \\ x_1+d_2^-{}-d_2^+=70 \\ x_2+d_3^-{}-d_3^+=50 \\ d_1^++d_4^-{}-d_4^+=10 \\ d_j^-d_j^+=0 \qquad (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

这里 P_1，…，P_4。表示等级级别，不是一个乘数。

对于一般问题，设有 p 个目标函数和决策者希望他们要达到的各自对应的目标值如下：

目标函数 $f_1(x)$，……，$f_p(X)$

目标值 f_1^0，……，f_p^0

$X\in R$，R 为可行域，记 $F(X)=(f_1(X),\ \cdots,\ f_p(X))^T$，$F^0=(f_1^0,\ \cdots,\ f_p^0)^T$ 在可行域中考虑各 $f_i(X)$ 逼近其对应目标值 f_i^0 的问题可记作

$$\text{V—}\underset{X\in R}{\text{appr}}\,F(X)\to F^0 \qquad \text{(AGP)}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

模型(AGP，Approximete Goal Programming)叫做以 F^0 为目标值的逼近目标规划(简称目标规划)。

为了描述向量目标函数 $F(X)$ 与其目标值 F^0 的逼近程度，需要引进目标空间 E_p 中点 $F(X)$ 与 F^0 之间的某种距离

$$D\left[F(X),\ F^0\right]$$

由于 $F(X)$逼近 F^0 可用它们之间的距离尽可能地小来刻画，因而问题(AGP)可归结为数值极小化问题

$$\min D\left[F(X),\ F^0\right] \tag{8.30}$$

显然，当我们赋予距离 $D\left[F(X),\ F^0\right]$ 以不同意义时，式(8.30)就表示在相应意义下的逼近于 F^0，这时也就对应一个在该意义下求解(AGP)的方法。

下面我们给出一种简单而又便于运算的 $D\left[F(X),\ F^0\right]$ 的形式，为此先引入几个偏差的概念：

$f_i(X)$关于 f_i^0 的绝对偏差 $\triangle_i=|f(X)-f_i^0|\quad i=1,\cdots,p$

$f_i(X)$关于 f_i^0 的正偏差 $\quad d_i^+=\begin{cases}f_i(X)-f_i^0, 当 f_i(X)\geq f_i^0, i=1,\cdots,p\\ 0 \qquad , 当 f_i(X)<f_i^0\end{cases}$

$f_i(X)$关于 f_i^0 的负偏差 $\quad d_i^-=\begin{cases}0 \qquad , 当 f_i(X)\geq f_i^0, i=1,\cdots,p\\ -\left(f_i(X)-f_i^0\right), 当 f_i(X)<f_i^0\end{cases}$

(8.31)

由式(8.31)可直接得到关系

$$d_i^+ + d_i^- = \Delta_i = |f_i(X)-f_i^0| \qquad i=1,\cdots,p \tag{8.32}$$

$$d_i^+ - d_i^- = f_i(X)-f_i^0 \qquad i=1,\cdots,p \tag{8.33}$$

$$d_i^+ d_i^- = 0 \qquad i=1,\cdots,p \tag{8.34}$$

$$d_i^+\geqslant 0,\ d_i^-\geqslant 0 \qquad i=1,\cdots,p \tag{8.35}$$

下面我们讨论第一种情形，取 $D(F(X),\ F^0)=\sum|f_i(X)-f_i^0|=\sum(d_i^+-d_i^-)$，则问题成为

$$\min \quad \sum|f_i(X)-f_i^0| \tag{8.36}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$X \in R$$

则对应的目标规划为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{p} (d_i^+ - d_i^-) \\ \text{s.t.} \quad & X \in R \\ & f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = f_i^0 \qquad i = 1, \cdots, p \\ & d_i^+ d_i^- = 0 \\ & d_i^+ \geqslant 0,\ d_i^- \geqslant 0 \end{aligned} \tag{8.37}$$

该模型的目标函数是线性函数，但在约束条件中有非线性约束 $d_i^+ d_i^- = 0$，为使问题简化，舍弃该约束条件得到模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{p} (d_i^+ + d_i^-) \\ \text{s.t.} \quad & X \in R \\ & f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = f_i^0, \qquad i = 1, \cdots, p \\ & d_i^+ \geqslant 0,\ d_i^- \geqslant 0 \end{aligned} \tag{8.38}$$

可以证明，若($\overline{X}$，$\overline{d}^+$，$\overline{d}^-$)是式(8.38)的最优解(这里 $\overline{d}^+ = (\overline{d}_1^+, \cdots, \overline{d}_p^+)^T$，$\overline{d}^- = (\overline{d}_1^-, \cdots, \overline{d}_p^-)^T$)，则其中 $\overline{X}$ 必为式(8.36)的最优解。

如果对正偏差 d_i^+、负偏差 d_i^- 分别给予不同权重 w_i^+，w_i^-，再考虑各目标的优先次序。$P_1>P_2$，…，P_P，那么得到

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum p_{ij}(w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-) \\ \text{s.t.} \quad & X \in R \\ & f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = f_i^0 \qquad i = 1, \cdots, p \\ & d_i^+ \geqslant 0,\ d_i^- \geqslant 0 \end{aligned} \tag{8.39}$$

其中 d_i^+，d_i^- 所处的优先等级为 p_{ij}，(有可能 d_i^+ 与 d_i^- 不在一个等级上)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

下面再用一个实例说明目标规划模型的建立。

例 2 (投资决策问题)设某投资公司计划对四个工厂进行投资，已知各工厂的单位投资费用，并对利润率作了五种预测，列于表 8.2。

表 8.2 各投资方案利润率预测

工厂		工厂 1	工厂 2	工厂 3	工厂 4
单位投资费用(元)		30	45	27	53
利润率(单位投资的利润)	预测 1	3.00	13.00	4.00	25.00
	预测 2	1.00	4.50	0.60	15.00
	预测 3	2.75	1.75	2.75	20.00
	预测 4	4.50	5.00	1.90	5.00
	预测 5	3.25	2.75	3.75	35.00
平均利润		2.90	5.40	2.60	20.00

公司有以下 4 个目标：

第一目标 P_1：最大投资总额最接近，而不超过 1 000 000 元；

第二目标 P_2：总平均利润尽量达到总投资的 10%；

第三目标 P_3：保证投资风险最小，这里风险用各次预测利润与平均利润的偏差量之和的绝对值来衡量。

第四目标 P_4：总投资的 10%应投放给工厂 4。

根据以上 4 条要确定公司的投资决策。

设公司对第 i 个工厂的投资为 $x_i(i=1,2,3,4)$个单位，那么可得约束条件为：

(1) 总投资额上界约束：$30x_1+45x_2+27x_3+53x_4+d_1^-=1\,000\,000$，其中 d_1^-为不足投资上界的偏差量，$(d_i^+=0)$；

(2) 平均利润约束 $2.90x_1+5.40x_2+2.60x_3+20.00x_4+d_2^--d_2^+=0.10(30x_1+45x_2+27x_3+54x_4)$，其中 d_2^-、d_2^+为总平均利润不足和超过总投资 10%的偏差量。上式整理后得到

$$-0.10x_1+0.90x_2-0.10x_3+14.70x_4+d_2^--d_2^+=0$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(3) 最小风险约束

对预测 1 有 $0.10x_1+7.60x_2+1.40x_3+5.00x_4+d_3^-−d_3^+=0$

对预测 2 有 $-1.90x_1-0.90x_2-2.00x_3-5.00x_4+d_4^-−d_4^+=0$

对预测 3 有 $-0.15x_1-3.65x_2+0.15x_3+0.00x_4+d_5^-−d_5^+=0$

对预测 4 有 $-1.60x_1-0.40x_2-0.70x_3-15.00x_4+d_6^-−d_6^+=0$

对预测 5 有 $0.35x_1-2.65x_2+1.15x_3+15.00x_4+d_7^-−d_7^+=0$

其中，d_3^-，d_3^+，…，d_7^-，d_7^+分别为预测 1 至预测 5 的利润与平均利润的偏差量。

(4) 投资方向约束：工厂 4 需占总投资的 10%

$$53x_4+d_8^-−d_8^+=0.10(30x_1+45x_2+27x_3+53x_4)$$

整理得

$$-3.00x_1-4.50x_2-2.70x_3+47.7x_4+d_8^-−d_8^+=0$$

其中，d_8^-、d_8^+为工厂 4 的投资不足和超过总投资 10%的偏差量。

最后写出目标函数：

第一目标 P_1 min d_1^-；

第二目标 P_2 min $d_2^-+d_2^+$；

第三目标 P_3 min $\sum_{i=3}^{7} d_i^-+d_i^+$；

第四目标 P_4 min $d_8^-+d_8^+$；

得到目标规划问题

$$\min\ Z=P_1(d_1^-)+P_2(d_2^-+d_2^+)+P_3\left[\sum_{i=3}^{7}(d_i^-+d_i^+)\right]+P_4(d_8^-+d_8^+)$$

$$\text{s.t.}\quad 30x_1+45x_2+27x_3+53x_4+d_1^-=1\ 000\ 000$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$-0.1x_1+0.9x_2+0.1x_3+14.7x_4+d_2^{-}-d_2^{+}=0$$
$$0.1x_1+7.6x_2+1.4x_3+5.0x_4+d_3^{-}-d_3^{+}=0$$
$$-1.9x_1-0.9x_2-2.0x_3-5.0x_4+d_4^{-}-d_4^{+}=0$$
$$-0.15x_1-3.65x_2+0.15x_3+d_5^{-}-d_5^{+}=0$$
$$-1.6x_1-0.4x_2-0.7x_3-15.0x_4 \quad +d_6^{-}-d_6^{+}=0$$
$$0.35x_1-2.65x_2+1.15x_3+15.0x_4 \ +d_7^{-}-d_7^{+}=0$$
$$-3.0x_1-4.5x_2-2.7x_3+47.7x_4 \quad +d_8^{-}-d_8^{+}=0$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ d_1^{-},\ d_2^{-},\ d_2^{+},\ \cdots,\ d_8^{-},\ d_8^{+}\geqslant 0$$

由上面两个例子可得到目标规划的步骤如下：

(1) 将需要考虑的多(p)个目标 f_1，…，f_p 划分为若干个优先等级 $P_1\succ P_2\succ\cdots\succ P_k(1\leqslant k\leqslant p)$，并规定对于同一个等级的若干个目标，根据重要性程度给出权重系数；

(2) 对每个目标 $f_i(X)$对于其预定的目标值 f_i^0 引入正负偏差量 d_i^{+}、d_i^{-}，并写出约束条件

$$f_i(X)+d_i^{-}-d_i^{+}=f_i^0$$

(3) 构造目标规划模型的目标函数，它总是按不同优先等级求某种意义下的偏差量之和最小。特别地对线性目标规划考虑绝对偏差时的一般形式为式(8.39)。

8.7.2 线性目标规划的单纯形解法

我们用例 1 来说明用单纯形方法求解线性目标规划问题：

$$\min \quad [P_1d_1^{-}+P_2d_4^{+}+P_3(6d_2^{-}+5d_3^{+})+P_4d_1^{+}]$$
$$\text{s.t.} \quad x_1+x_2+d_1^{-}-d_1^{+}=90$$
$$x_1+d_2^{-}-d_2^{+}=70$$
$$x_2+d_3^{-}-d_3^{+}=50$$
$$d_1^{+}+d_4^{-}-d_4^{+}=10$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ d_j^{-}\geqslant 0,\ d_j^{+}\geqslant 0(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(1) 首先列出初始单纯形表。由于有四个等级的目标，所

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

以表中的检验数也有四行。按优先等级 P_1，P_2，P_3，P_4 自上而下排列，列于表 8.3(1)，从表中可看出基变量为 d_1^-、d_2^-、d_3^-、d_4^-，并且有 $B=I$ 及

对目标 P_1：$C_B^1=(1,0,0,0)$，对目标 P_2：$C_B^2=(0,0,0,0)$，

对目标 P_3：$C_B^3=(0,6,5,0)$，对目标 P_4：$C_B^4=(0,0,0,0)$。

计算各目标的检验行 $\xi^i=C_B^iB^{-1}A-C^i, i=1,2,3,4$ 列于表 8.3(1)。

表 8.3(1)　单纯形表 1

	变量	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	$C_BB^{-1}b$
检验行	P_1: ξ^1	1*	1	0	−1	0	0	0	0	0	0	90
	P_2: ξ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
	P_3: ξ^3	6	5	0	0	0	−6	0	−5	0	0	670
	P_4: ξ^4	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0
基变量	d_1^-	1	1	1	−1	0	0	0	0	0	0	90
	d_2^-	1	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	70
	d_3^-	0	1	0	0	0	0	1	−1	0	0	50
	d_4^-	0	0	0	1	0	0	0	0	1	−1	10
基		$B^{-1}A$										$B^{-1}b$

表 8.3(2)　单纯形表 2

	变量	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	$C_BB^{-1}b$
检验行	P_1: ξ^1	0	1	0	−1	−1	1	0	0	0	0	20
	P_2: ξ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
	P_3: ξ^3	0	5	0	0	−6	0	0	−5	0	0	250
	P_4: ξ^4	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0
基变量	d_1^-	0	1	1	−1	−1	1	0	0	0	0	20
	x_1	1	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	70
	d_3^-	0	1	0	0	0	0	1	−1	0	0	50
	d_4^-	0	0	0	1	0	0	0	0	1	−1	10
基		$B^{-1}A$										$B^{-1}b$

(2) 在初始单纯形表上，首先对第一等级目标进行换基迭代(其他各行目标的检验数同时作相同转轴)。此时 x_1 的检验数

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为正，令 x_1 入基，因为 70 / 1＜90 / 1，故 d_2^+ 应出基，进行转轴消元得到表 8.3(2)。再令 x_2 进基，d_1^- 出基得表 8.3(3)。在表 8.3(4)中，第一等级目标的各检验数都已非正，同时第二等级目标的检验数也已非正，但第三等级目标检验数中 d_1^+ 对应的检验数为 5＞0，而第一、第二等级中 d_1^+ 的检验数均为零，这说明如果让 d_1^+ 入基，不会影响第一、第二等级目标值，却可使第三等级目标值改进，因而令 d_1^+ 入基，继续用单纯形法迭代，得表 8.3(4)，在此表上第三等级各变量的检验数中，只有 d_4^+ 对应的检验数为 5>0，但 d_4^+ 的第二等级检验数为－1＜0，我们就不能再对第三等级目标继续迭代了，否则会破坏第二目标的最优状态。再检验第四等级的检验数，仅有 d_4^- 对应的检验数为 1＞0，但同样地由于对应的第三等级目标中 d_4^- 的检验数为－5＜0，于是第四等级也不再能继续迭代了。

表 8.3(3)　单纯形表 3

	变量	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	$C_BB^{-1}b$
检验行	P_1: ξ^1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_2: ξ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
	P_3: ξ^3	0	0	−5	5*	−1	−5	0	−5	0	0	150
	P_4: ξ^4	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0
基变量	x_2	0	1	1	−1	−1	1	0	0	0	0	20
	x_1	1	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	70
	d_3^-	0	0	−1	1	1	−1	1	−1	0	0	30
	d_4^-	0	0	0	[1]	0	0	0	0	1	−1	10
	基	$B^{-1}A$										$B^{-1}b$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 8.3(4) 单纯形表 4

	变量	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	$C_BB^{-1}b$
检验行	P_1: ξ^1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_2: ξ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
	P_3: ξ^3	0	0	−5	0	−1	−5	0	−5	−5	5	100
	P_4: ξ^4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	10
基变量	x_2	0	1	1	0	−1	1	0	0	0	−1	30
	x_1	1	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	70
	d_3^-	0	0	−1	0	1	−1	1	−1	−1	1	20
	d_1^+	0	0	0	1	0	0	0	0	1	−1	10
基		$B^{-1}A$										$B^{-1}b$

由表 8.3(4)可得到目标规划问题的解

$x_1=70$，$x_2=30$，$d_1^+=10$，$d_3^-=20$，$d_1^-=d_2^-=d_2^+=d_3^+=d_4^-=d_4^+=0$

即应生产 A 产品 70 吨，B 产品 30 吨，$d_1^+=10$ 表明需加班 10 小时，$d_3^-=20$ 说明 B 的产量没有达到预定值，其差额为 20 吨，这时工厂获得的利润为

$$3\times70+2.5\times30=285(\text{千元})。$$

8.8 DEA(数据包络分析)方法介绍

在确定对某个企业或部门进行投资前，投资者必须对企业的现状，它在当前经济环境下的地位，它的经济效益及今后投资效果等进行评价。在了解当前经济发展情况时，我们又往往需要对部门间或同一类企业进行横向比较，或对同一企业不同时期进行纵向比较。本节介绍一种以相对效率概念为基础，以多指标投入和产出数据为依据的评价相对有效性或效益的方法即 DEA(Data EnveloPment Analysis)方法也即数据包络分析法。

DEA 方法的第一个模型是 1978 年由美国著名运筹学家 A.Charnes，W.W.Cooper 和 E.Rhodes 首先提出的，称为 C^2R 模

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

型。这一模型可用来研究具有多投入和多产出的“生产部门”(称为决策单元，记为 DMU)间同时为技术有效和规模有效的情形。这以后在国内外又相继提出了多个 DEA 模型，例如用来研究生产部门之间的技术有效性的 C^2GS 模型，研究无穷多个决策单元的 C^2W 模型，对数据进行加权处理的锥比率 C^2WH 模型等。本节主要介绍最原始的 C^2R 模型。

8.8.1 模型的基本原理

假设有 n 个决策单元(即被评价单位)简称为 DMU。它们有相同类型的投入与产出。评价指标体系由 m 个投入(即资源耗费)及 s 个产出(即工作成效)指标组成。第 j 个决策单元(DMU_j)的投入用向量$(x_{1j}, \cdots, x_{mj})^T$表示，其中 x_{ij} 表示 DMU_j 的第 i 个投入分量，用$(y_{1j}, \cdots, y_{sj})^T$表示产出，其中 y_{rj} 表示 DMU_j 的第 r 个产出分量，并且 $x_{ij}>0, y_{rj}>0(i=1, \cdots, m, r=1, \cdots, s, j=1, \cdots, n)$。这些分量均是已知的，用 $v_i(i=1, \cdots, m)$，

				DMU_1	DMU_2	$\cdots$	DMU_n				
	v_1	1	→	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}				
	v_2	2	→	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}				
投入	$\vdots$	$\vdots$		$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$				
	v_m	m	→	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}				
				y_{11}	y_{12}		y_{1n}	→	1	u_1	
				y_{21}	y_{12}		y_{2n}	→	2	u_2	产出
				$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
				y_{s1}	y_{s2}	$\cdots$	y_{sn}	→	s	u_s	

图 8.8 各决策单元的投入与产出

$u_j(j=1, \cdots, s)$，表示对第 i 种投入及第 j 种产出的权系数，它们之间的关系由图 8.8 表示。

用向量 $X_j=(x_{1j}, \cdots, x_{mj})^T$，$Y_j=(y_{1j}, \cdots, y_{sj})^T$表示 DMU_j

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的投入和产出，相应的权向量为 $V=(v_1, \cdots, v_m)^T$，$U=(u_1, \cdots, u_s)^T$，每个 $\mathrm{DMU}_j(j=1, \cdots, n)$的效率评价指标为 h_j：

$$h_j=\frac{U^TY_j}{V^TX_j} \qquad j=1, \cdots, n \tag{8.40}$$

我们总可以通过适当地选取权向量 V 和 U 使对所有单元均有 $h_j \leqslant 1$，$j=1, \cdots, n$。

现在我们对第 $j_0(1 \leqslant j_0 \leqslant n)$个单元进行评价，为方便起见，记 DMU_{j0} 为 DMU_0，记 X_{j0}，Y_{j0} 为 X_0，Y_0，h_{j0} 记为 h_0，在对各决策单元的评价指数均不超过 1 的条件下，选取一组对于 j_0 单元最有利的权重，即使 h_0 达到最大的权重 V、U，这样得到的 h_0 就是 DMU_0 的评价指数，由此可得到如下的最优模型

$$(\overline{\mathrm{P}}) \qquad \max \quad h=\frac{U^TY_0}{V^TX_0}=V_P$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{U^TY_j}{V^TX_j} \leqslant 1 \quad j=1, \cdots, n \tag{8.41}$$

$$V \geqslant 0, \quad U \geqslant 0$$

上述问题是一个分式规划。作 Charnes—Cooper 变换：

令 $t=\dfrac{1}{V^TX_0}$，$\omega=tV$，$\mu=tU$，则有

$$\mu^TY_0=\frac{U^TY_0}{V^TX_0},$$

$$\frac{\mu^Ty_j}{\omega^Tx_j}=\frac{U^TY_j}{V^TX_j} \leqslant 1, \quad \omega^TX_j-\mu^TY_j \geqslant 0 \quad j=1, \cdots, n$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$\omega^T X_0 = 1$

$\omega \geqslant 0$，$\mu \geqslant 0$

则分式规划 $(\overline{\mathrm{P}})$ 转化为等价线性规划问题

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{aligned}
&\max \mu^T Y_0 = V_P \\
&\text{s.t.}\quad \omega^T X_j - \mu^T Y_j \geqslant 0 \qquad j=1,\cdots,n \\
&\qquad\quad \omega^T X_0 = 1 \\
&\qquad\quad \omega \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{8.42}
$$

(由于最优解 $\mu^T Y_0$ 为正数，这就保证了 $\mu \geqslant 0$，由于 $\omega^T X_0 = 1$，保证了 $\omega \geqslant 0$，因而可将 $\omega \geqslant 0$，$\mu \geqslant 0$ 改写为 $\omega \geqslant 0$，$\mu \geqslant 0$)

可以证明 $(\overline{\mathrm{P}})$ 与(P)有下述等价关系：

(1) 若 V^0、U^0 为 $(\overline{\mathrm{P}})$ 的最优解，则 $\omega^0 = t^0 V^0$，$\mu^0 = t^0 U^0$ 也是(P)的最优解，并且最优值相等。其中 $t^0 = \dfrac{1}{V_0^T X_0}$

(2) 若 ω^0、μ^0 为(P)的最优解，则 ω^0、μ^0 也是 $(\overline{\mathrm{P}})$ 的最优解，并且最优值相等。

线性规划问题(P)的对偶线性规划为

$$
(\mathrm{D})\quad
\begin{aligned}
&\min \quad \theta = V_D \\
&\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^- = \theta X_0 \\
&\qquad\quad \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+ = Y_0 \\
&\qquad\quad \lambda_j \geqslant 0, \qquad j=1,\cdots,n \\
&\qquad\quad S^- \geqslant 0,\quad S^+ \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{8.43}
$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中 $S^-=(s_1^-,\ \cdots,\ s_m^-)^T$，$S^+=(s_1^+,\ \cdots,\ s_s^+)^T$ 为松弛变量。

下面给出 C^2R 模型下有效的定义

定义 8.10 若线性规划问题(P)的最优解 ω^0、μ^0 满足 $V_P=\mu^{0T}Y_0=1$，则称 DMU_0 为弱 DEA 有效的(C^2R)。

定义 8.11 若线性规划问题(P)存在某个最优解 ω^0、μ^0 满足 $V_P=\mu^{0T}Y_0=1$，并且 $\omega^0>0$，$\mu^0>0$，则称 DMU_0 为 DEA 有效的(C^2R)。

显然一个决策单元是 DEA 有效的，则一定是弱 DEA 有效的。

同样可利用对偶问题(D)判定决策单元的 DEA 或弱 DEA 的有效性，具体结论为：

(1) 决策单元 j_0 为弱 DEA 有效的充分必要条件是(D)的目标函数最优值 $V_D=\theta^0=1$。

(2) 决策单元 j_0 为 DEA 有效的充分必要条件是(D)的目标函数最优值 $V_D=\theta^0=1$，并且它的每一个最优解 $\lambda^0=(\lambda_1^0,\ \cdots,\ \lambda_n^0)^T$，$S^{0-}$，$S^{0+}$，$\theta^0$ 都满足 $S^{0-}=0$，$S^{0+}=0$。

我们还可以证明，决策单元的最优效率评价指数 V_P 与投入量和产出量的量纲选取无关。

8.8.2 DEA(C2R)有效性与 Pareto 有效解的关系

一个理想的决策单元应该是以较少的投入达到较大的产出，用多目标的语言来描述就是 n 个决策单元中，理想决策单元应该是多目标规划问题

$$(VP)\ V-\min F(X,\ Y)=(X^T,\ -Y^T)^T \tag{8.44}$$

$$\text{s.t.}\quad (X,\ Y)\in T$$

的 Pareto 有效解(或至少为弱 Pareto 有效解)。式中 $X=(x_1,\ \cdots,\ x_m)^T$ 表示某个可能的投入向量，$Y=(y_1,\ \cdots,\ y_s)^T$ 表示某个可能的产出向量，$F(X,\ Y)=(X^T,\ -Y^T)^T$，T 为生产可能集，即$(X,$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Y)的可行域。

DEA 有效性与多目标问题(V_P)的 Pareto(弱)有效解本质上是相同的，可以证明它们具有关系：

(1) (X_0，Y_0)为多目标规划问题(V_P)的 Pareto 有效解，当且仅当相应的 DMU_0 是 DEA(C^2R)有效的；

(2) (X_0，Y_0)为多目标规划问题(V_P)的弱 Pareto 有效解，当且仅当相应的 DMU_0 是弱 DEA(C^2R)有效的；

(3) 生产可能集 T 中至少存在一个决策单元是 DEA(C^2R)有效的。

8.8.3 DEA 有效性的经济含义

(1) 生产可能集

设某种生产活动的投入量为 $X=(x_1, \cdots, x_m)^T$，产出量为 $Y=(y_1, \cdots, y_s)^T$，用点(X，Y)表示该种生产活动，设 n 个决策单元生产活动分别为(X_j，Y_j)，$j=1,\cdots,n$，我们要根据它们的生产活动估计所有可能的生产活动集合，即生产可能集，那么

$T=\{(X, Y)|$产出 Y 可以由投入 X 生产出来$\}$

在 C^2R 模型中，生产可能集 T 应满足以下四条公理：

①凸性：即对任意(X，Y)$\in T$，($\hat{X}$，$\hat{Y}$)$\in T$，则对任意 $\lambda \in (0, 1)$有 $\lambda(X, Y)+(1-\lambda)(\hat{X}, \hat{Y})=(\lambda X+(1-\lambda)\hat{X}, \lambda Y+(1-\lambda)\hat{Y})\in T$

②锥性：即对任意(X，Y)$\in T$，任意 $k\geqslant 0$ 有

$$k(X, Y)=(kX, kY)\in T$$

③无效性：即对任意(X，Y)$\in T$，任意 $\hat{X}\geqslant X$，$\hat{Y}\leqslant Y$有

$$(\hat{X}, Y)\in T,\ (X, \hat{Y})\in T,\ (\hat{X}, \hat{Y})\in T$$

(即在原来生产活动基础上，单方面增加投入或减少产出，或同时增加投入而减少产出的生产活动是可能进行的)。

④最小性：生产可能集 T 是满足上述条件①～③的所有集

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

合的交集，即为它们中最小者。

由此可以根据实际生产活动(X_j, Y_j)，$j=1, \cdots n$，得到“经验”生产可能集

$$T=\{(X, Y)|\sum_{j=1}^{n}X_j\lambda_j\leqslant X,\ \sum_{j=1}^{n}Y_j\lambda_j\geqslant Y,\ \lambda_j 0,\ j=1,\ \cdots n\}$$

生产可能集是唯一确定的，图 8.9 给出由生产活动(1，1.5)、(1，3)、(2，1)、(3，4)、(4，2)、(4，5)确定的生产可能集。

(2) 生产函数，技术有效与规模有效

生产函数 $Y=Y(X)$表示在当前条件下，生产处于最好的理想状态时，当投入量为X时，所可能获得的最大产出量Y。在生产函数上的生产活动均处于理想状态。我们称这类生产活动是“技术有效”的。

从生产函数角度看，函数图像上的点(X, Y)所代表的决策单元都是技术有效的。如图 8.9 上的虚线就是生产函数曲线。点D、A、B代表的决策单元是技术有效的。

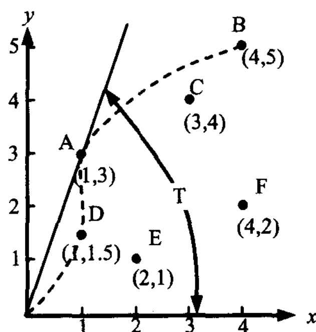


图 8.9 生产可能集与生产函数

生产函数为增函数，处于生产函数曲线上的点A将该曲线分成两部分：在A的左边的函数加速上升，说明适当增加投入

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

量可以使产出有较高的增加，因而使厂商有增加投资积极性，故这一段区间为规模收益递增阶段，而在 A 点右面则为规模收益递减阶段，生产处于该阶段时，厂商继续增加投资的积极性大大下降，因此 A 点所代表的决策单元的投入规模是最适当的，而 B 点与 D 点仅为技术有效，C、E、F 点则既非技术有效又非规模有效。

(3) C^2R 模型下 DEA 有效的经济含义

考虑规划问题

$$
\text{(D)}\quad \begin{aligned} \min\quad & \theta = V_D \\ \text{s.t.}\quad & \sum X_j\lambda_j \leqslant \theta X_0 \\ & \sum Y_j\lambda_j \geqslant Y_0 \\ & \lambda_j \geqslant 0, \qquad j=1,\cdots,n \end{aligned}
$$

其中，(X_0, Y_0)为 DMU_0 的生产状态，有

$(X_0, Y_0) \in T = \{(X, Y) | \sum X_j\lambda_j \leqslant X,\quad \sum Y_j\lambda_j \geqslant Y, \lambda_j \geqslant 0, j=1,\cdots,n\}$

可见规划问题(D)是要求出一组最优解 θ^0，λ_j^0，$j=1,\cdots,n$，使 θ^0 尽量地小，如果 $\theta^0<1$，那么当 Y_0 不变时，投入量 X_0，能按同一比例 θ^0 减少，而使目标函数值 $V_D=\theta^0$ 上升到 1。这说明投入可以减少，因而它不是技术有效的。如果 X_0 不再能按同一比例减少，那么 $V_D=\theta^0=1$，在单投入，单产出情形下，决策单元 DMU_0，同时为技术有效和规模有效。

对 C^2R 模型，由于生产可能集的锥性假定，容易证明，C^2R 下的 DEA 有效单元，它既是技术有效的也是规模有效的。

对于非 DEA(C^2R)有效单元，它既可能是技术有效(如果该单元位于生产函数曲线上)但不是规模有效的，也可能既非规模有效又非技术有效。下述原则可用来判断一个决策单元是收益递增还是递减的。

设 λ^0、S^{0-}、S^{0+}、θ^0 为规划问题(D)的最优解，那么有

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

① $\frac{1}{\theta^0}\sum\lambda_j^0=1 \Leftrightarrow$ DMU$_0$ 为规模恰当，当产出保持不变时，无法在生产可能集中减少投入；

② $\frac{1}{\theta^0}\sum\lambda_j^0<1 \Leftrightarrow$ DMU$_0$ 为规模收益递增；

③ $\frac{1}{\theta^0}\sum\lambda_j^0>1 \Leftrightarrow$ DMU$_0$ 为规模收益递减。

例 设有三个决策单元 DMU$_1$、DMU$_2$、DMU$_3$，它们的生产活动(X, Y)分别为(2，2)、(4，1)、(5，3.5)要判断各 DMU 的 DEA(C^{2}R)有效性。

解：相应对 DMU$_1$ 的(P$_1$)与(D$_1$)为

$$(P_1)\quad \begin{aligned} \max\quad & 2\mu_1=V_{p1} \\ \text{s.t.}\quad & 2\omega_1-2\mu_1\geqslant 0 \\ & 4\omega_1-\mu_1\geqslant 0 \\ & 5\omega_1-3.5\mu_1\geqslant 0 \\ & 2\omega_1=1 \\ & \omega_1\geqslant 0,\ \mu_1\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$(D_1)\quad \begin{aligned} \min\quad & \theta=V_{D1} \\ \text{s.t.}\quad & 2\lambda_1+4\lambda_2+5\lambda_3+s^-=2\theta \\ & 2\lambda_1+\lambda_2+3.5\lambda_3-s^+=2 \\ & \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\geqslant 0 \\ & s^-\geqslant 0,\ s^+\geqslant 0 \end{aligned}$$

(P$_1$)有最优解 $\omega_1^0=\frac{1}{2}>0$，$\mu_1^0=\frac{1}{2}>0$，$V_{p1}=2\mu_1^0=1$，

(D$_1$)有最优解 $\lambda^0=(1,\ 0,\ 0)^T$，$s^{0-}=0$，$s^{0+}=0$。

可知 DMU$_1$ 为技术有效和规模有效的。由图 8.10 可看出，对 DMU$_1$ 当保持产出不变时，无法在生产可能集内减少投入。

对 DMU$_2$ 对应的(D$_2$)为

$$(D_2)\quad \begin{aligned} \min\quad & \theta=V_{D2} \\ \text{s.t.}\quad & 2\lambda_1+4\lambda_2+5\lambda_3+s^-=4\theta \\ & 2\lambda_1+\lambda_2+3.5\lambda_3-s^+=1 \\ & \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ s^-,\ s^+\geqslant 0 \end{aligned}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

解得最优解为 $\lambda^0=(\frac{1}{2},\ 0,\ 0)^T$，$s^{0-}=0$，$s^{0+}=0$，$V_{D2}=\theta^0=\frac{1}{4}<1$。可知 DMU_2 不是 DEA 有效的，又由 $\frac{1}{\theta^0}\sum\lambda_j=2>0$ 知 DMU_2 的投入规模过大，故 DMU_2 既非技术有效又非规模有效。

对 DMU_3 对应的规划问题(D_3)为

$$
(D_3)\qquad
\begin{aligned}
&\min \quad \theta=V_{D3}\\
&\text{s.t.} \quad 2\lambda_1+4\lambda_2+5\lambda_3+s^-=5\theta\\
&\qquad\quad 2\lambda_1+\lambda_2+3.5\lambda_3-s^+=3.5\\
&\qquad\quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ s^-,\ s^+\geqslant 0
\end{aligned}
$$

其最优解为 $\lambda^0=(\frac{7}{4},\ 0,\ 0)^T$，$s^{0-}=0$，$s^{0+}=0$，$\theta^0=\frac{7}{10}<1$，可见 DMU_3 也不是 DEA 有效的，并由 $\frac{1}{\theta}\sum\lambda_j=\frac{10}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{5}{2}>1$ 知 DMU_3，也处于规模收益递减阶段。但其位于生产函数曲线上，故 DMU_3 为技术有效而非规模有效的(图 8.10)。

(4) DEA 相对有效面及 DMU 在相对有效面上的投影

设 DMU_0 是 DEA(C^2R)有效的，对应的规划问题(P)有最优解 ω^0、μ^0，满足

$$\omega^0>0,\ \mu^0>0,\ V_p=\mu^0Y_0$$

ω^0 满足条件 $\omega^0X_0=1$，故 $\omega^0X_0-\mu^0Y_0=0$，即点(X_0，Y_0)位于超平面 π：$\omega^0X_0-\mu^0Y_0=0$ 上，可以证明，这个超平面上的其他点所代表的决策单元也是 DEA 有效的，超平面 π 称为 DEA 的相对有效面(图 8.10)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

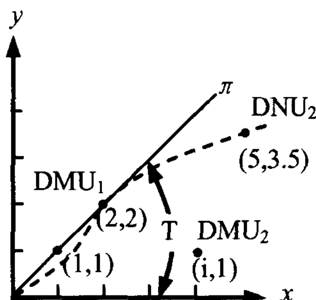


图 8.10 本例中 C^2R 模型的相对有效面

现在假设决策单元 DMU_0 是非 DEA 有效单元，并设其对应的规划问题的解为 λ^0、s^{0-}、s^{0+}、θ^0，那么令

$$\hat{X}_0=\theta X_0-s^{0-},\quad \hat{Y}_0=Y_0+s^{0+} \tag{8.44}$$

则称$(\hat{X}_0,\ \hat{Y}_0)$为 DMU_0 的$(X_0,\ Y_0)$在相对有效面上的投影，并且可以证明$(\hat{X}_0,\ \hat{Y}_0)$所代表的新的决策单元，相对于原来的 n 个决策单元来说是 DEA 有效的。这样我们不仅可以了解造成 DMU_0 非 DEA 有效的原因，也为 DMU_0 的生产活动的改进提供了一个可供参考的方案。

例如在上例中，只要将 DMU_2 的生产活动$(X_0,\ Y_0)=(4,\ 1)$修改为

$$\hat{X}_0=\frac{1}{4}X_0=1,\quad \hat{Y}_0=1$$

那么(1，1)就在相对有效面上了(图 8.10)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

8.8.4 其他 DEA 模型介绍

(1) 评价技术有效性的 C^2GS^2 模型

在 C^2R 模型中，我们对生产可能集作了“锥性”假设，这与实际情况有较大出入，因而使我们不能判别那些不是规模有效而仅为技术有效的决策单元。为了考察各个单元的技术有效情形,我们去掉锥性公理，将生产可能集转化为一个凸多面体 $\hat{T}$

$$\hat{T}=\{(X,\ Y)|\sum X_j\lambda_j\leqslant X,\ \sum Y_j\lambda_j\geqslant Y,\ \sum\lambda_j=1,\ \lambda_j\geqslant 0\} \qquad (8.45)$$

T 与 $\hat{T}$ 的比较如图 8.11 所示。

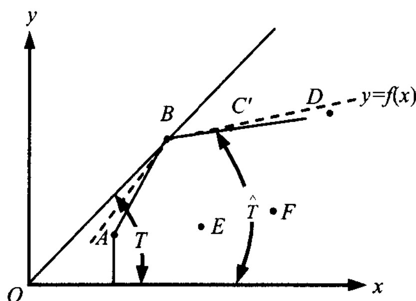


图 8.11` C^2GS^2 的生产可能集

由图 8.11 可看出，在 C^2R 模型下仅 B 点为 DEA 有效的，且 B 点同时为技术有效和规模有效，而其余点均非 DEA 有效，而对生产可能集 $\hat{T}$ 来说，点 A、B、C、D 均处于相对的最佳生产状态，折线 $ABCD$ 构成了 $\hat{T}$ 的“相对有效生产前沿面”(即生产有效面)，它们是 $\hat{T}$ 的外包络的一部分，当被评价的决策单元

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

越来越多时，那么由它们构成的生产可能集的相对有效生产前沿面与生产函数越来越吻合，这种在 $\hat{T}$ 上进行相对效益评价的模型称为 C^2GS^2 模型，相应的线性规划为

$$
\text{(P)}\quad
\begin{aligned}
\max\quad & (\mu^T Y_0+\mu_0)=V_P \\
\text{s.t.}\quad & \omega^T X_j-\mu^T Y_j-\mu_0\geqslant 1 \qquad j=1,\cdots,n \\
& \omega^T X_0=1 \\
& \omega^T\geqslant 0,\ \mu^T\geqslant 0(\mu_0\text{ 无限制})
\end{aligned}
\tag{8.46}
$$

相应的对偶规划为

$$
\text{(D)}\quad
\begin{aligned}
\min\quad & \theta=V_D \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} X_j\lambda_j\leqslant\theta X_0 \\
& \sum_{j=1}^{n} Y_j\lambda_j\geqslant Y_0 \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j=1 \\
& \lambda_j\geqslant 0 \qquad j=1,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{8.47}
$$

我们定义若线性规划问题(P)存在最优解 ω^0、μ^0 和 $\mu_0{}^0$ 满足

$$V_P=(\mu^0)^T Y_0+\mu_0{}^0=1$$

则称 DMU_0 为弱 DEA 有效的(C^2GS^2)。如果进一步有 $\omega^0>0$，$\mu^0>0$，则称 DMU_0 为 DEA 有效的(C^2GS^2)。

可以证明，决策单元 j_0 是 DEA 有效的(C^2GS^2)，则其生产活动(X_0，Y_0)一定位于生产可能集 $\hat{T}$ 的有效生产前沿面上。关于该模型的详细讨论请读者参阅文献［11］。

(2) 锥比率的 C^2WH 模型

在 C^2R 模型中，ω、μ(即权向量 U、V)的可行域为整个

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

E_m^+ 和 E_s^+，由模型确定的最优解是对 j_0 单元最有利的指标权重向量，这就忽略了各投入产出指标的实际重要程度的区别。例如对于既生产煤又生产黄金的企业，煤和黄金将处于同等地位接受评价。生产煤多黄金少的单元可选择对煤的大权重而使自己处于有利地位，显然这种评价是不公平的，为此我们应当限制权向量的选择范围，即将其可行域缩小，这样在 C^2R 模型基础上，得到了锥比率 C^2WH 模型(Pw^T)

$$
(Pw^T)\quad \begin{aligned} \max \quad & \mu^T Y \\ \text{s.t.} \quad & \omega^T X_j - \mu^T Y_j \geqslant 1 \quad j=1,\cdots,n \\ & \omega^T X_0 = 1 \\ & \omega \in V,\ \omega \in U \end{aligned} \tag{8.48}
$$

其中 U、V 是多面凸锥，分别是 μ、ω 的可行域。

规划问题(Pw^T)可转化为一般线性规划问题。设凸锥 V 是由 m^T 个列向量 α^1，…，α^m 所张成，U 是由 s^T 个列向量 β^1，…，β^{sT} 所张成，那么矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)T} \\ \vdots \\ \alpha^{(m')T} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \beta^{(1)T} \\ \vdots \\ \beta^{(s')T} \end{pmatrix}
$$

分别称为投入与产出加权矩阵，这样

$$
\begin{aligned} V &= \{\sum_{i=1}^{mT} \alpha^i \omega_j^* | \omega_j^* \geqslant 0 \quad i=1,\cdots,m^T\} \\ &= \{A^T\omega^* | \omega^* = (\omega_1^*, \cdots, \omega_{mT}^*)^T \in E_{mT}^+\} \end{aligned} \tag{8.49}
$$

$$
\begin{aligned} U &= \{\sum_{i=1}^{sT} \beta^i \mu_j^* | \mu_j^* \geqslant 0 \quad i=1,\cdots,s^T\} \\ &= \{B^T\mu^* | \mu^* = (\mu_1^*, \cdots, \mu_{sT}^*)^T \in E_{sT}^+\} \end{aligned}
$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在(Pw^T)中作变换 $\omega = A^T\omega^*$，$\mu = B^T\mu^*$ (8.50)

得到模型

$$(Pw)\quad \begin{aligned} \max\quad & \mu^{*T}(BY_0) \\ \text{s.t.}\quad & \omega^{*T}(AX_j) - \mu^{*T}(BY_j) \geq 0 \\ & \omega^{*T}(AX_0) = 1 \\ & \omega^* \geq 0,\ \mu^* \geq 0 \end{aligned} \tag{8.51}$$

只要先对原始数据进行加权处理，使 $X_j \to AX_j$，$Y_j \to BY_j$，$j = 1,\cdots,n$，然后仍用 C^2R 模型计算。并可证明当决策单元为 DEA(C^2WH)有效时，必为 DEA(C^2R)有效。

加权矩阵 A、B 的选择有多种方法，用层次分析法中判断矩阵确定 A、B 不失为一个好方法。有兴趣的读者可参阅文献[12]。

8.9 模糊决策方法介绍

模糊决策是基于模糊数学理论的一种决策方法。模糊数学诞生于 1965 年，其创始人是美国数学家 L.A.Zadeh 教授。20 世纪 70 年代后有关模糊数学的研究与应用迅速发展，并被广泛应用于聚类分析、图像识别自动控制、医疗诊断以及决策分析中，我们把模糊数学在决策方面的应用称为模糊决策。

8.9.1 集合与特征函数

众所周知，集合是指具有某种特定属性的对象的全体。集合一般用大写字母 A、B、X、Z 表示。属于某一集合的各个对象我们称为集合的元素，通常用小写字母 x、y 等表示。在讨论问题时，我们把所要考察的对象(元素)的全体称为论域。显然论域内元素个数不会少于相关集合的元素的个数，例如我们考察的范围若为实数，那么有理数集合就包含在论域一实数域中，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

论域常用符号∪表示。

如果论域中的每个元素和集合 A 的关系只能有两种：或者 $X\in A$；或者 $x\notin A$，那么 A 就是普通集合(简称集合)。x 和 A 的这种关系易于用反映二值逻辑的函数

$$C_A(x)=\begin{cases}1 & 当x\in A\\ 0 & 当x\notin A\end{cases}$$

表示，函数 $C_A(x)$称为集合 A 的特征函数。

8.9.2 模糊集合与隶属函数

在普通集合中，特征函数 $C_A(x)$只能取 0 或 1 两个值，故只能表示二值逻辑。属于或不属于 A。但在现实生活中广泛存在着一个元素既属于又不完全属于 A 的模糊情形。比方说，集合 A 是管理得好的企业的集合，但什么叫管理得好呢？这是一个模糊的概念。有许多企业说它管理得好，它又有许多不足之处；说它管理得不好，它又有许多地方还不错。这个集合的概念与每月效益超过百万企业的集合是不同的。我们把前面这种集合称为模糊集合。

和普通集合的特征函数相应，论域 U 中的元素 x 属于模糊集合的程度或资格，我们用函数 $\mu_A(x)$表示。$\mu_A(x)$可取[0，1]区间上的任意值。我们把 A 称为 U 上的模糊子集，$\mu_A(x)$称为模糊集合 A 的隶属函数。

例 1 A 为老人集，设 x 为年龄，定义

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 50\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5}{x-50}\right)^2} & x>50\end{cases}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

作为隶属函数，那么 $\mu_A(55)=0.5$，$\mu_A(70)=0.9$，即 55 岁的人只能算半老，而 70 岁的人就是 90% 的老人了。

当模糊集合只包括有限个元素 x_1，…，x_n，它们的隶属函数分别为 $\mu_A(x_i) i=1$，…，n，那么可用一个隶属向量

$$A_n=[\mu_A(x_1), \cdots, \mu_A(x_n)] \tag{8.52}$$

来表示模糊集合 A，有时还记成

$$A_n=\frac{\mu_1}{x_1}+\frac{\mu_2}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_n}{x_n} \tag{8.53}$$

注意这里“/”只是一个记号，不表示除法，$\mu_i=\mu_A(x_i)$，当某个 $\mu_j=0$ 时，相应项 $\dfrac{\mu_j}{x_j}$ 可不写。

例 2 体操比赛时有 5 名优秀运动员 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 参赛，那么 $U=(x_1, \cdots, x_n)$。A 是优秀运动员集合，他们属于优秀的隶属度由得分 $\times\dfrac{1}{10}$ 得到，若 x_1 得分为 9.90，x_2 得分为 9.50，x_3 得分为 10 分，x_4 得分为 9.2 分，x_5 得分为 9.65 分，那么

$$A=(0.99, 0.95, 1, 0.92, 0.965)$$

或

$$A=\frac{0.99}{x_1}+\frac{0.95}{x_2}+\frac{1.0}{x_3}+\frac{0.92}{x_4}+\frac{0.965}{x_5}$$

当论域中有无限多个元素时，通常隶属函数用解析式表示，隶属函数一般由专家或有关当事人主观确定，或根据调查确定。

8.9.3 模糊集合的运算

与普通集合一样，模糊集合也可以运算，同一论域上，两

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

个模糊集合之间运算归结为对隶属函数值作相应运算，其规则如下：

设 A、B、C、D 为同一论域上的模糊集合，若对所有元素 x，有

(1) $\mu_A(x)=\mu_B(x)$，则 $A=B$；

(2) 若 $\mu_B(x)=1-\mu_A(x)$，则集合 B 称为 A 的补集，记为 $B=A^-$，

(3) 若 $\mu_A(x)>\mu_B(x)$，则称 A 包含 B，记作 $A\supset B$，

(4) 若 $\mu_A(x)=0$，则称 A 为空集，记作 $A=\Phi$，

(5) 若 $\mu_C(x)=\max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$，则称 C 为 A 与 B 的并集，记作 $C=A\cup B$，以及 $\mu_C(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$，

(6) 若 $\mu_D(x)=\min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$，则称 D 为 A 与 B 的交集，记作 $D=A\cap B$ 以及 $\mu_D(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$。

设论域 $U=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$，集合

$$A=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{0.9}{x_4}+\frac{0.965}{x_5}$$

$$B=\frac{0.8}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{1.0}{x_4}\qquad(\mu_B(x_3)=0)$$

求 A^-，$A\cup B$，$A\cap B$

解 $$A^-=\frac{1-0.5}{x_1}+\frac{1-0.2}{x_2}+\frac{1-0.7}{x_3}+\frac{1-0.9}{x_4}$$

$$=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}+\frac{0.1}{x_4}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$A\cup B=\frac{0.8}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{1.0}{x_4}$$

$$A\cap B=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.9}{x_4}$$

以上运算还可以推广到多个模糊集合的情形，并且满足普通集合运算的交换律、结合律、分配律、传递律等。

8.9.4 模糊识别

在实际应用中，往往要作元素的模糊识别，从若干个模糊子集中，根据隶属函数值挑选出 x 最适合的模糊子集。最简单、最直观的识别方法是运用最大隶属原则。

最大隶属原则：给定对象 $x\in U$，设 A_i，$i=1$，…，n 是 U 上 n 个模糊子集，$\mu_{Ai}(x)$是它们的隶属函数，若有某个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$满足

$$\mu_{Ak}(x)=\bigvee_i \mu_{Ai}(x) \tag{8.54}$$

则判定 x 最适合属于 A_k。

例 3　科研成果评价

人们对于科研成果的评价常用“国际领先”、“国际先进”、“国内领先”等评语。实际上它们都对应着成果域 U 上的模糊子集。现在我们聘请 20 名专家对某项成果的评价项填写表 8.4(打 √ 即可)(允许某些评语可不填写)。收到 20 张表格后，将结果统计并填入表 8.5 中。经过讨论对恰当、较恰当、较不合适、绝对不行分别赋权 0.5、0.25、0.15、0.1，表中数字代表打 √ 的人数，计算表中每一评语的带权综合分。例如国际领先综合分为 1×0.5＋3×0.25＋6 ×0.15＋1×0.1＝2.25，然后以该评语受

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

评总次数作分母，得隶属函数值，例如国际领先受评次数为 11，故其隶属函数值为 $\frac{2.25}{11}\approx 0.205$，由表 8.5 得最大隶属函数值为 0.441，故该科研成果的评语应为“国内一般”。

表 8.4 科研成果评价表

评　语	你对评语的看法			
	恰当	较合适	较不合适	绝对不行
国际领先				
国际先进				
国内领先				
国内一般				
无 新 意				

表 8.5 科研成果评价实例

评　语	你对评语的看法				综合法	评价次数	隶属函数值
	恰当	较合适	较不合适	绝对不行			
权　重	0.5	0.25	0.15	0.1			
国际领先	1	3	6	1	2.25	11	0.205
国际先进	2	4	3	1	2.55	10	0.255
国内领先	4	4	2	0	3.30	10	0.330
国内一般	9	1	0	1	4.85	11	0.441
无 新 意	8	3	0	0	4.75	11	0.432

8.9.5 模糊决策关系及其运算

“关系”通常被用来描述两个或两个以上的研究对象之间的关联性质。当这种关系不能用确定的语言如“有”、“无”描述时，就需要用模糊关系加以描述。

设有论域 U 和 V，$U=\{x_1, \cdots, x_m\}$，$V=\{y_1, \cdots, y_n\}$论域 $U\times V$ 是由论域 U 和 V 的全体元素构成。在其上定义一个模糊集合

$$R=\{(x_i, y_j)|x_i\in U, y_i\in V\} \tag{8.55}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

称为 $U \times V$ 上的模糊关系，其隶属函数 $\mu_R(x_i, y_j)$称为 x_i、y_j 的 R 相关程度。

模糊关系中两元点对(x_i, y_j)共有 $m \times n$ 个，其隶属函数常用矩阵表示。例如设 V 是由一个多目标决策问题的目标组成的论域，现有三个目标 y_1、y_2、y_3，而 U 是由可行策略组成的论域，并有四个可供选择的策略 x_1、x_2、x_3、x_4。若策略 x_i 满足 y_j 的程度已经评定，记为 $a_{ij}=\mu_R(x,y)$，且矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.6 \\ 1.0 & 0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

那么矩阵 A 就是论域 $U \times V$ 的模糊关系 R 的隶属函数，称为模糊关系矩阵。其中 $a_{ij}=\mu_R(x_i,y_j)$表示策略 x_i 对目标 y_j 的满足程度。

设有模糊关系矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，$C=(c_{ij})_{n\times l}$ 则它们的并，交和乘法($\circ$)的运算规则为

$$A\cup B=(a_{ij}\vee b_{ij}),\ A\cap B=(a_{ij}\wedge b_{ij}),\ A\circ C=\vee^{n}{}_{k=1}(a_{ik}\wedge c_{kj}) \quad (8.56)$$

例如

$$A=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A\cup B=\begin{bmatrix} 0.5\vee 0.8 & 0.3\vee 0.4 \\ 0.4\vee 0.3 & 0.6\vee 0.7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$A\cap B=\begin{bmatrix} 0.5\wedge 0.8 & 0.3\wedge 0.4 \\ 0.4\wedge 0.3 & 0.6\wedge 0.7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$A\circ B=\begin{bmatrix} (0.5\wedge 0.3)\vee(0.3\wedge 0.6) & (0.5\wedge 0.8)\vee(0.3\wedge 0.5) \\ (0.4\wedge 0.3)\vee(0.6\wedge 0.6) & (0.4\wedge 0.8)\vee(0.6\wedge 0.5) \end{bmatrix}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$=\begin{bmatrix}0.3 & 0.5\\0.6 & 0.5\end{bmatrix}$$

8.9.6 多目标模糊决策

在不确定型决策中，事物的模糊性可归结为决策目标的模糊性和约束条件的模糊性。例如一商店如果把决策目标定为“使顾客满意”，这就是一个模糊目标，其结果必然导致评价标准的模糊性，人们只能凭主观印象用“好”、“较好”、“一般”、“差”之类的模糊语言去评价。同样地决策的约束条件也可以是模糊的，例如要求服务人员的“素质好”就是一个模糊约束。

首先我们来考虑单目标和单约束情形。设模糊目标和约束集分别为 G 和 S，策略集为 $X=\{x_1, \cdots, x_n\}$，G 和 S 的隶属函数分别为 $\mu_G(x)$和 $\mu_S(x)$。那么

$$G=\frac{\mu_G(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_G(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_G(x_n)}{x_n}$$

$$S=\frac{\mu_S(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_S(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_S(x_n)}{x_n}$$

设模糊关系 $D=G\cap S$

则 D 表示可行策略的集合，其隶属函数为 $\mu_D(x)$，

$\mu_D(x_i)=\mu_G(x_i)\wedge\mu_S(x_i) \qquad i=1\cdots,n$

$$D=\frac{\mu_G(x_1)\wedge\mu_S(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_G(x_2)\wedge\mu_S(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_G(x_n)\wedge\mu_n(x_n)}{x_n}$$

而 $X_R=\{x|\mu_D(x)=\max_i \mu_D(x_i), x_i\in X\}$

就是理想策略集。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

当模糊目标与模糊约束不止一个时，做法类似。

8.9.7 多目标模糊综合评判

设考虑 m 个模糊目标集，它们可以是评判准则、属性等，即

$$G=\{g_1,\cdots,g_m\}$$

和 n 个策略(或方案)集

$$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$$

满足第 i 个目标 g_i 的策略集记为 $A^{(i)}$ 且

$$A^{(i)}=(a_{i1},\ \cdots,\ a_{in})\quad i=1,\ \cdots,m$$

其中，a_{ij} 是策略 x_j 满足第 i 个目标的水平或程度，即为 x_j 属于 $A^{(i)}$ 的隶属函数值，这样就构成了该模糊关系矩阵

$$\begin{array}{c} \quad\quad 策略1 \quad \cdots \quad 策略n \\ R=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 目标1 \\ 目标2 \\ \vdots \\ 目标m \end{array} \end{array} \tag{8.57}$$

假设各目标也有不同重要性，并且也用很重要、重要、不很重要、不重要的模糊语言评价，于是其重要性也构成模糊集 W，

而 $w(g_i)=\ w_i$ 表示目标 g_i 的重要性隶属函数值，令 $\sum_{i=1}^{m} w_i=1, w_i$

值由专家评定，那么

$$W=\frac{w_1}{g_1}+\frac{w_2}{g_2}+\cdots+\frac{w_m}{g_m}=(w_1,\cdots,w_n)$$

将模糊集 W 与模糊关系 R 相乘，可得到综合评价结果：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$B = W \cdot R = (w_1, \cdots, w_m) \circ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = (b_1, \cdots, b_n) \tag{8.58}$$

其中，$b_j = \vee_{k=1}^{m} (w_k \wedge a_{kj}), j = 1, \cdots, n$，它表示第 j 个策略对各目标的综合满足程度。当 $b_l = \max\limits_j b_j$ 时，第 l 个策略就是最理想策略。

例 4　设有五种待选产品，它们用质量、价格、功能和外观等四个指标作为评价标准。已知这四个指标的权重隶属向量为 W=(1.0，0.8，0.8，0.4)，并且各产品满足各指标程度的模糊关系矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.25 & 0.18 & 0.10 & 0.10 \\ 0.20 & 0.15 & 0.33 & 0.20 & 0.20 \\ 0.25 & 0.30 & 0.15 & 0.18 & 0.15 \\ 0.20 & 0.22 & 0.17 & 0.24 & 0.25 \end{bmatrix}$$

要选出最优产品。

解：首先将 W 归一化得 W=(0.33，0.27，0.27，0.13)，然后可得

$$B = W \circ R = (0.25，0.27，0.27，0.20，0.20)$$

故第二、三种产品是理想产品。

关于模糊决策问题读者可参阅文献[15]。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

参考文献

1 姜圣阶，曲格平等．决策分析基础（上、下册）．北京：中国社会科学出版社

2 陈挺．决策分析．北京：科学出版社，1987

3 邹晓健．寻求最佳决策．北京：轻工业出版社，1988

4 侯定丕．管理科学定理分析引论．合肥：中国科技大学出版社，1993

5 任俊，康晓文．价值工程——经营管理技术．北京：宇航出版社，1988

6 龚德恩等．管理数学方法．北京：中国人民大学出版社，1991

7 马庆国，孙飞翔．决策科学导论．杭州：浙江人民出版社，1990

8 王莲芬，许树柏．层次分析法引论．北京：中国人民大学出版社，1990

9 宣家冀，方爱群．目标规划及其应用．合肥：安徽教育出版社，1987

10 中国人民大学数学教研室．运筹学通论．北京：中国人民大学出版社，1987

11 何宪章，林炯等．投资学．台湾空中大学印，1992

12 张维迎．博弈论与信息经济学．上海：三联书店，上海人民出版社，1996

13 魏权龄．评价相对有效性的 DEA 方法—运筹学的新领域．北京：中国人民大学出版社，1988

14 王莲芬，卢刚，朗庆红．AHP 与 DEA 的结合及其在评价社会经济系统中的应用．决策与层次分析法．青岛：青岛海洋大学出版社，1991

15 贺仲雄．模糊数学及其应用．天津：天津科学技术出版社，1985

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

16 [英]J.E.伍兹等．数理经济学．代定一，等译．北京：中国展望出版社，1987

17 蔡大用．数值代数．北京：清华大学出版社，1987

18 [美]Ulysses S.Kotts，J.R.Emest，W.Swift．管理科学与管理决策．上海：上海社会科学院出版社，1987.8

19 [美]T.L.萨迪．层次分析——在资源、管理和冲突分析中的应用．许树柏，等译．北京：煤炭工业出版社，1988

20 [美]H．范里安．微观经济学：现代观点．费方域，等译．上海：上海人民出版社，1994

21 Saaty T.L. Multicriteria Decision making. The Analytic Hierarchy Process. Pittsburgh，1990

22 Saaty T. L. Decision Making For Leader. Pittsburgh，1990

23 Reuven R. Levery ，Neil E. Seiz. Quantitative Methods for Captltal Budgeting. South－Western Publishing Co. 1990

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

责任编辑：白　燕
封面设计：常志远

Touzi Juece
投资决策



Lianghua fangfa
量化方法



ISBN 7-5027-6557-3/F·462
定价：28.00元